FARKLI VE BİRBİRİNDEN DEĞİŞİK ÇEŞİTLİ ÇİZGE AİLELERİ ÜZERİNDE TANIMLANAN KLASİK HIRSIZ–POLİS OYUNUNUN AYRINTILI OLARAK İNCELENMESİ

Doktora Tezi

Nazlıcan ÇAKMAK

Eskişehir 2025

FARKLI VE BİRBİRİNDEN DEĞİŞİK ÇEŞİTLİ ÇİZGE AİLELERİ ÜZERİNDE TANIMLANAN KLASİK HIRSIZ–POLİS OYUNUNUN AYRINTILI OLARAK İNCELENMESİ

Nazlıcan ÇAKMAK

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR
İkinci Danışman: Prof. Dr. Handan AKYAR

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Temmuz 2025

Bu tez çalışması BAP Komisyonu tarafından kabul edilen 1709F522 no.lu proje kapsamında desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nazlıcan ÇAKMAK'ın "FARKLI VE BİRBİRİNDEN DEĞİŞİK ÇEŞİTLİ ÇİZGE AİLELERİ ÜZERİNDE TANIMLANAN KLASİK HIRSIZ–POLİS OYUNUNUN AYRINTILI OLARAK İNCELENMESİ" başlıklı tezi 18/07/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvan Adı Soyadı**	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	:	Prof. Dr. Emrah AKYAR	
Üye	:	Prof. Dr. Cahit ARF	
Üye	:	Prof. Dr. Kerim ERİM	
Üye	:	Doç. Dr. Ayşe ÖZTÜRK	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Ali YILMAZ	

Prof. Dr. Harun BÖCÜK
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

18/07/2025

DANIŞMAN ONAYI

Danışmanlığını yürüttüğüm Doktora öğrencisi Nazlıcan ÇAKMAK, “FARKLI VE BİRBİRİNDEN DEĞİŞİK ÇEŞİTLİ ÇİZGE AİLELERİ ÜZERİNDE TANIMLANAN KLASİK HIRSIZ–POLİS OYUNUNUN AYRINTILI OLARAK İNCELENMESİ” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Danışman
Prof. Dr. Emrah AKYAR

ÖZET

FARKLI VE BİRBİRİNDEN DEĞİŞİK ÇEŞİTLİ ÇİZGE AİLELERİ ÜZERİNDE TANIMLANAN KLASİK HIRSIZ–POLİS OYUNUNUN AYRINTILI OLARAK İNCELENMESİ

Nazlıcan ÇAKMAK
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz 2025

Danışman: Prof. Dr. Emrah AKYAR
İkinci Danışman: Prof. Dr. Handan AKYAR

Bu tezde, çizgeler üzerinde bir köşe takip oyunu olan "Hırsız-Polis" oyunu incelenmektedir. Oyunun çizgeler üzerinde incelenmesi fikri, popüler video oyunu Pac-Man'in analizinden kaynaklanmaktadır. Bu oyunda, her hamle çizge üzerindeki bir kenara karşılık gelir. Oyunda hırsız ve polis olmak üzere iki tür oyuncu yer alır. Oyuncu sayısı, çizgenin köşe noktalarıyla sınırlanır. Oyunun başında, her oyuncu bir köşe noktası seçer ve her turda, komşu köşelere hareket edebilir veya mevcut yerlerinde kalabilirler.

Oyunun amacı, en az sayıda polis kullanarak hırsızı yakalamaktır. Hırsızı yakalamak için gereken minimum polis sayısına çizgenin "polis sayısı" denir. Bu tezde, belirli çizge türleri için polis sayısı belirlenmekte ve oyun, çizgenin alt çizgeleri üzerinde oynandığında polis sayısının nasıl değiştiği araştırılmaktadır. Ayrıca, oyunun yeni bir versiyonu tanıtılarak klasik versiyonuyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Anahtar sözcük 1, Anahtar sözcük 2, Anahtar sözcük 3, Anahtar sözcük 4, Anahtar sözcük 5.

ABSTRACT

A DETAILED INVESTIGATION OF THE CLASSICAL COPS AND ROBBERS GAME DEFINED ON VARIOUS AND MUTUALLY DISTINCT FAMILIES OF GRAPHS

Nazlıcan ÇAKMAK
Department of Mathematics
Programme in Analysis and Theory of Functions
Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July 2025

Supervisor: Prof. Dr. Emrah AKYAR
Co-Supervisor: Prof. Dr. Handan AKYAR

The inspiration for studying this game on graphs comes from an analysis of the popular video game Pac-Man. In this game, each move corresponds to an edge in the graph. The game involves two players: the cop and the robber. The number of players is limited by the vertices of the graph. At the beginning of the game, each player selects a vertex, and in each round, they can either move to adjacent vertices or remain in their current positions. The objective of the game is to capture the robber using the minimum number of cops. This minimum number of cops required to catch the robber is called the cop number of the graph.

The main focus of this thesis is to determine the cop number for specific graphs. It explores how the cop number changes when the game is played on various subgraphs of the original graph. Furthermore, a new version of the game is introduced and compared to the classical version.

Keywords: First keyword, Second keyword, Third keyword, Fourth keyword, Fifth keyword.

18/07/2025

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Nazlıcan ÇAKMAK

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim sürecim boyunca gerçek anlamda danışmanlığını her zaman hissettiğim, bilgi ve deneyimiyle bana çok şey katan değerli danışmanım X'e; bu süreçte her daim paylaşımda bulunduğum, desteğini her zaman yanımda hissettiğim Y'ye ve ihtiyaç duyduğum her anda yanımda olarak varlıklarıyla bana güç veren kıymetli aileme içtenlikle teşekkür ederim.

Nazlıcan ÇAKMAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

V	:	Çizgenin köşe noktaları kümesini göstermektedir. İki satır olsun diye fazla bir cümle eklenmiştir
E	:	Çizgenin kenarlar kümesi, köşe noktalar kümesinin 2-elemanlı bazı alt kümelerinin kümesidir
$\deg(v)$	:	v köşe noktasının derecesi
$\Delta(G)$	:	G çizgesinin en büyük derecesi
$\delta(G)$	:	G çizgesinin en küçük derecesi
K_n	:	n köşe noktalı tam çizge
P_n	:	n köşe noktalı patika çizge
C_n	:	n köşe noktalı döngü çizge
W_n	:	n köşe noktalı tekerlek çizge
S_n	:	n köşe noktalı yıldız çizge
$K_{m,n}$	:	İki kümeli tam çizge
Q_n	:	n köşe noktalı hiperküp çizge
P	:	Petersen çizge
$\chi(G)$	:	G çizgesinin kromatik sayısı
$\chi_g(G)$	:	G çizgesinin oyun kromatik sayısı
$\mathrm{col}_g(G)$	:	G çizgesinin oyun renk sayısı
$G \square H$	:	G ile H çizgelerinin Kartezyen çarpımı
$G \times H$	:	G ile H çizgelerinin direkt çarpımı
$G \boxtimes H$	:	G ile H çizgelerinin güçlü çarpımı
$G \circ H$	:	G ile H çizgelerinin nokta çarpımı
$S(n,k)$	:	Sierpinski çizge

$S_{a,b}$	:	Dereceler dizisi $(a+1, b+1, 1, 1, \ldots, 1)$ olan çift yıldız çizge
$G[H]$	:	G ve H çizgelerinin sırasal çarpımı

1. GİRİŞ

Çizge kuramı, temelleri 1736 yılında Leonhard Euler tarafından atılan matematiğin bir alt dalıdır. Bu kuram aslında Königsberg'in 7 köprüsü" isimli bir matematik problemi olarak ortaya çıkmıştır. Günümüzde çizge kuramı bilgisayar bilimleri, mühendislik bilimleri, sosyoloji, işletme, genetik bilimi, coğrafya gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Çok sayıda gerçek hayat problemi çizgeler yardımıyla modellenip çözülebilmektedir.

Bu tezde, çizgeler üzerinde oynanan bazı köşe takip oyunları, özellikle de Hırsız-Polis oyunu ele alınmıştır. Çizgeler üzerinde köşe takip oyunu, çizgenin köşe noktaları ve kenarları üzerinde oyuncuların belli kurallara göre hamleler yapması olarak tanımlanabilir. Köşe takip oyunlarından en popüler olan Hırsız-Polis oyunu, 1980'lerin başında ortaya atılmış ve günümüze kadar değişerek ve gelişerek ulaşmıştır. Oyun, temelde verilen çizge üzerinde bir hırsızı yakalamaya çalışan polislerden oluşmaktadır. Hırsız ve polislerin sayısı oyunun üzerinde oynandıgı çizgenin köşe noktaları ile sınırlıdır ve her turda oyuncular bulundukları köşe noktalarının komşu köşe noktalarına hamle yapabilir veya oldukları köşe noktasında kalabilirler. Amaç en az sayıda polisle hırsızı yakalamaktır.

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde çizge kuramı ile ilgili sonraki bölümler için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiştir. Bu tanım ve teoremler için [2, 8, 28] referanslarından yararlanılmıştır.

1.1.1. Çizge ile ilgili tanımlar

Tanım 1.1. $V \neq \emptyset$ ve sonlu bir küme, E kümesi de V kümesinin iki elemanlı bazı alt kümelerinden oluşan bir küme olmak üzere; $G = (V, E)$ yapısı bir çizge belirtir. Burada V kümesi G çizgesinin köşe noktaları, E kümesi de G çizgesinin kenarlar kümesi olarak adlandırılır.

Tablo 1.1 ile Platonik çizgelerin çeşitli özellikleri verilmektedir.

1.1.2. Çizge ile ilgili olmayan bazı tanımlar

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna.

Tablo 1.1. *Bu tablo, beş platonik katı cismin çizge karşılıklarının temel özelliklerini göstermektedir. Her çizge için köşe sayısı, kenar sayısı, çizgenin yarıçapı, çapı ve kromatik sayısı verilmiştir. Yarıçap, çizgenin herhangi bir köşesinden diğer köşelere olan en kısa yolların minimum uzunluğunu; çap ise çizgenin en uzak köşe çiftleri arasındaki en kısa yol uzunluğunu ifade etmektedir. Kromatik sayı ise çizgenin boyanmasında gerekli minimum renk sayısını belirtir*

Çizge	**Köşe**	**Kenar**	**Yarıçap**	**Çap**	**Kromatik Sayı**
Tetrahedron	4	6	1	1	4
Cube	8	12	3	3	2
Octahedron	6	12	1	2	4
Dodecahedron	20	30	5	5	3
Icosahedron	12	30	1	3	4

Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

2. OLDUKÇA UZUN GÖRÜNEBİLECEK BİR BÖLÜM BAŞLIĞI OLSUN DİYE YAZILAN BİR BAŞLIK

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

2.1. Bir Diğer Alt Başlık

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Tablo 2.1. *Bazı temel diziler ve seriler için genel terim, kısmi toplam ve yakınsaklık özellikleri. Bu tablo, özellikle analiz derslerinde sıkça karşılaşılan aritmetik ve geometrik diziler ile bazı klasik serilerin davranışlarını özetlemek amacıyla hazırlanmıştır.*

Dizi / Seri	**Genel Terim**	**S_n (Kısmi Toplam)**	**Yakınsaklık**
Aritmetik Dizi	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$	Iraksak ($d \neq 0$)
Geometrik Dizi	$a_n = a_1 r^{n-1}$	$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$	$\|r\| < 1$ ise yakınsak
Geometrik Seri	$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$	$\frac{a}{1-r}$	$\|r\| < 1$
Harmonik Seri	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	—	Iraksak
p-Serisi	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	—	$p > 1$ ise yakınsak
Üstel Seri	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	e^x	Her $x \in \mathbb{R}$ için yakınsak

2.1.1. Diğer tanımlar

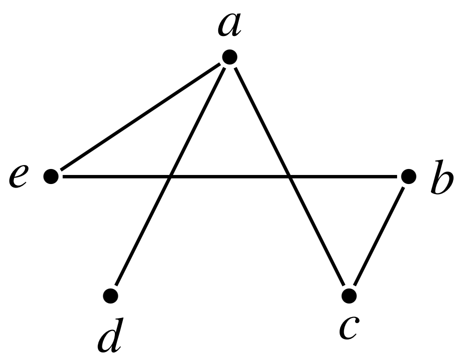
Bir G çizgesinin köşe noktaları veya kenarlar kümesinden bahsedildiğini belirtmek için genellikle $V(G)$ ve $E(G)$ gösterimleri kullanılır. Burada G çizgesinin herhangi iki u ve v köşe noktasını birleştiren kenar genel olarak $\{u, v\}$ ile ya da kısaca uv ile gösterilir.

Çizgeler genellikle; köşe noktaları düzlemde noktalar, kenarları ise köşe noktalarına karşılık gelen bu noktalar arasına çizilen çizgilerden oluşan diyagramlar yardımıyla gösterilir.

Tanım 2.1. Bir $u \in V(G)$ köşe noktası için, u köşe noktasına gelen kenarların sayısına u köşe noktasının derecesi denir ve $\deg(u)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2 (El Sıkışma Teoremi)**.** Bir $G = (V, E)$ çizgesinde tüm köşe noktalarının dereceleri toplamı, kenar sayısının iki katına eşittir. Yani,

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \tag{2.1}$$



Şekil 2.1. *Bir G çizgesi örneği olsun diye koyulan ama koyulmasa da olabilecek olan bir şekil*

olur.

Kanıt. Her bir kenarın iki uç noktasının çizgenin toplam derecesine katkısı 2 olacağından tüm noktaların derecelerinin toplamı kenar sayısının iki katına eşit olur. □

Tablo 2.2 ile Platonik çizgelerin çeşitli özellikleri verilmektedir.

Tablo 2.2. *Her çizge için köşe sayısı, kenar sayısı, çizgenin yarıçapı, çapı ve kromatik sayısı verilmiştir. Yarıçap, çizgenin herhangi bir köşesinden diğer köşelere olan en kısa yolların minimum uzunluğunu; çap ise çizgenin en uzak köşe çiftleri arasındaki en kısa yol uzunluğunu ifade etmektedir.*

Çizge	Köşe	Kenar	Yarıçap	Çap	Kromatik Sayı
Tetrahedron	4	6	1	1	4
Cube	8	12	3	3	2
Octahedron	6	12	1	2	4
Dodecahedron	20	30	5	5	3
Icosahedron	12	30	1	3	4

2.2. Bir Başka Alt Başlık

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2.2.1. Örnek olsun diye yazılan bir başka üçüncü düzey başlık örneği

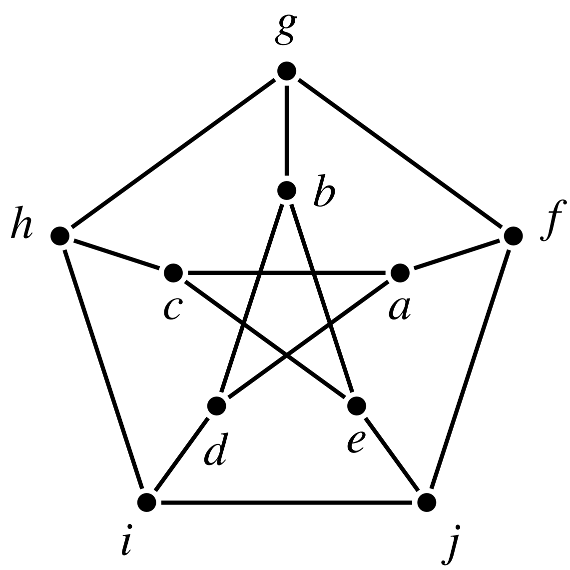
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

2.2.2. Bir tane daha örnek olsun diye yazılan bir başka üçüncü düzey başlık örneği

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Tablo 2.3. *Bazı temel türevler ve integraller*

Fonksiyon $f(x)$	**Türev** $f'(x)$	**Belirsiz integral** $\int f(x)\,dx$
$x^n \ (n \neq -1)$	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
e^x	e^x	$e^x + C$
$\ln x \ (x > 0)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$\arctan x + C$



Şekil 2.2. *Petersen çizge, 10 köşe ve 15 kenara sahip, 3-regüler bir çizgedir. Çizge, yüksek simetriye sahip olup, Hamilton döngüsü içermez. Kapsamlı bir örnek olarak çizge kuramı çalışmalarında sıkça kullanılır.*

2.3. Bir Diğer Uzunca Sayılabilecek İki Satır Olacak Şekilde Bir Alt Başlık Örneği

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Çizgeler üzerinde bir başka çarpım da güçlü çarpım (strong product) işlemidir. G ve H çizgelerinin güçlü çarpımı olan $G \boxtimes H$ çizgesi, köşe noktaları kümesi

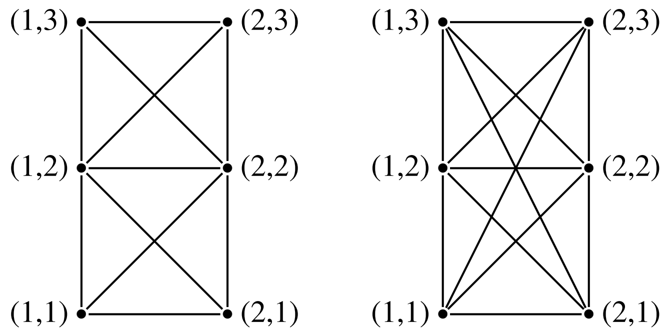
$$V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$$

ve kenarlar kümesi de

$$
\begin{aligned}
E(G \boxtimes H) &= \{\{(u,u'),(v,v')\} \mid (u=v \text{ ve } \{u',v'\} \in E(H)) \text{ veya} \\
&\quad (u'=v' \text{ ve } \{u,v\} \in E(G)) \text{ veya} \\
&\quad (\{u,v\} \in E(G) \text{ ve } \{u',v'\} \in E(H))\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan bir çizgedir.

Örneğin, Şekil 2.3 ile $P_2 \boxtimes P_3$ ve $P_2 \boxtimes C_3$ güçlü çarpım çizgeleri gösterilmektedir.



Şekil 2.3. *$P_2 \boxtimes P_3$ ve $P_2 \boxtimes C_3$ güçlü çarpım çizgeleri*

Enomoto ve diğerleri, çeşitli çizgelerin güçlü çarpımlarının oyun kromatik sayıları ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir [3].

Teorem 2.3 ([3])**.** Keyfi $t \geq 2$ çift tamsayısı için

$$\chi_g(G \boxtimes K_t) > t\,\chi_g(G)$$

eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda G çizgesi vardır.

t tamsayısının tek olması durumunda bu iddianın geçerli olup olmadığı ise kanıtlanamamıştır.

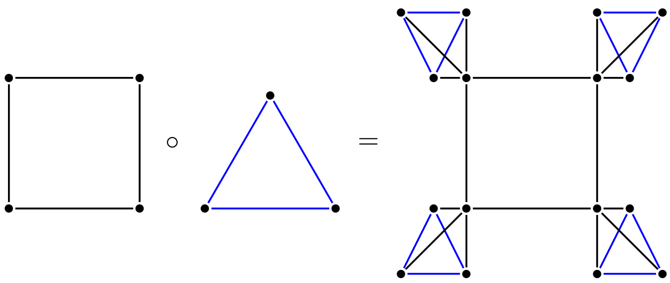
Çizgelerin bir başka çarpımı da nokta çarpımı (corona product) olarak adlandırılan çarpımdır. Eğer G ve H çizgeleri sırasıyla n_1 ve n_2 köşe noktalı çizgeler ise, G ve H çizgelerinin nokta çarpımı olan $G \circ H$ çizgesi, G çizgesinin bir kopyası ile H çizgesinin n_1 tane kopyası alınıp, G çizgesinin i. köşe noktası ile H çizgesinin i. kopyasının tüm köşe noktaları arasına bir kenar çizilmesiyle elde edilir.

Örneğin, Şekil 2.4 ile $C_4 \circ C_3$ nokta çarpım çizgesinin elde edilişi gösterilmektedir.

Çizgelerin nokta çarpımının oyun kromatik sayıları ile ilgili literatürde çok fazla çalışma bulunmasa da, [2] ve diğerleri $P_m \circ C_m$ nokta çarpım çizgesinin oyun kromatik sayısını belirlemiştir.

Teorem 2.4 ([2])**.** Her $n \geq 2$ ve $m \geq 3$ için

$$\chi_g(C_m \circ P_m) = 4$$



Şekil 2.4. *$C_4 \circ C_3$ nokta çarpım çizgesi*

olur.

Bazı n doğal sayıları için $\gamma_g(P_n)$, $\gamma'_g(P_n)$, $\gamma_{tg}(P_n)$ ve $\gamma'_{tg}(P_n)$ değerleri Tablo 2.4 ile verilmiştir.

Tablo 2.4. *Bazı n sayıları için $\gamma_g(P_n)$, $\gamma'_g(P_n)$, $\gamma_{tg}(P_n)$ ve $\gamma'_{tg}(P_n)$ değerleri*

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma_g(P_n)$	1	2	3	3	3	4	5	5
$\gamma'_g(P_n)$	2	2	3	3	4	4	5	5
$\gamma_{tg}(P_n)$	2	3	3	4	5	6	6	7
$\gamma'_{tg}(P_n)$	2	3	4	4	5	6	6	7

[4] ile verilen çalışmada sunulan, oyun baskınlık sayısına ilişkin genel üst sınır ve kanıt aşağıda sunulmuştur.

Teorem 2.5 ([4])**.** G, domine edilmemiş izole köşe nokta bulundurmayan, kısmen domine edilmiş bir çizge olsun. Eğer G çizgesi, d tane domine edilmiş ve s tane doymuş köşe noktasına sahip, n köşe noktalı bir çizge ise,

$$\gamma_g(G) \leq \frac{1}{3}(2n - s - d) \qquad \text{ve} \qquad \gamma'_g(G) \leq \frac{1}{3}(2n - s - d + 1)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt. Genelliği bozmaksızın, G çizgesinin küçültülmüş bir çizge olduğu varsayılsın. Bu varsayım, oyunun sonucunu etkilemeyeceği için sakıncasızdır. Bu durumda G çizgesinin $s \geq 0$ tane doymuş köşe noktası vardır; bu köşe noktaları G çizgesinde izoledir ve varsa geri kalan $n - s$ köşe noktası izole değildir. Kanıt, $n - s$ üzerinden tümevarım yoluyla yürütülür.

Eğer $n - s = 0$ ise, G çizgesinin tüm köşe noktaları doymuştur. Bu durumda $n = s = d$ olur ve $\gamma_g(G) = \gamma'_g(G) = 0 = (2n - s - d)/3$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla temel durumda eşitsizliğin geçerli olduğu görülür.

$n - s > 0$ olsun. O halde G çizgesinin en az iki köşe noktası bulunduran, en az bir bileşeni vardır. Tümevarım hipotezi olarak, G' küçültülmüş çizgesinin d' tane domine edilmiş, $s' > s$ olmak üzere, s' tane doymuş köşe noktasına sahip, n köşe noktalı bir çizge olduğu ve $\gamma_g(G') \leq \frac{1}{3}(2n - s' - d')$ ile $\gamma'_g(G') \leq \frac{1}{3}(2n - s' - d' + 1)$ eşitsizliklerinin geçerli olduğu kabul edilsin.

G çizgesinin her biri K_2 ile izomorfik olan $k \geq 1$ tane, en az bir köşe noktası bulunduran bileşene sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda $n - s = 2k$ ve her K_2 bileşeni en az bir domine edilmemiş köşe noktası içerdiğinden, $d \leq s + k$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca oyunun geri kalanında her bileşende yalnızca bir hamle yapılması mümkündür. O halde

$$\gamma_g(G) = \gamma'_g(G) = k = \frac{1}{3}(2(s + 2k) - s - (s + k)) \leq \frac{1}{3}(2n - s - d)$$

olup her iki sınır da geçerlidir. Dolayısıyla, G çizgesinin en az üç köşe noktasına sahip en az bir bileşen içerdiği durum incelenmelidir. Aksi halde eşitsizliklerin geçerli olduğu görülmüştür.

G çizgesinin en az üç köşe noktasına sahip, en az bir bileşen içerdiği varsayılsın. İlk hamleyi yapan Oyalayan oyuncu olsun. G', d' tane domine edilmiş ve s' tane doymuş köşe noktasına sahip, n köşe noktalı küçültülmüş çizgeyi göstersin. G' çizgesinin, izole olmayan domine edilmemiş köşe noktası içermediğine dikkat edilmelidir. Çünkü G' çizgesinin en az bir köşe noktasına sahip her bileşeni, en az bir tane domine edilmemiş köşe noktasına sahiptir ve G' çizgesindeki domine edilmemiş tüm köşe noktaları, G çizgesinde sahip olduğu dereceye sahiptir. Oyalayan oyuncunun hamlesi en az bir yeni köşe noktasını domine eder ve en az bir yeni köşe noktasını (hamle olarak seçip oynadığı köşe noktası) doyurur. Buradan $d' \geq d + 1$ ve $s' \geq s + 1$ sonuçları elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\gamma'_g(G) &= 1 + \gamma_g(G') \\
&\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - s' - d') \\
&\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - (s + 1) - (d + 1)) \\
&= \frac{1}{3}(2n - s - d + 1)
\end{aligned}$$

olup eşitsizlik sağlanır. Burada ilk eşitlik Oyalayan oyuncunun hamlesinin optimalliğinden, ikinci eşitsizlik G' çizgesine uygulanan tümevarım hipotezinden, üçüncü eşitsizlik ise yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan kaynaklanır.

Şimdi de ilk hamleyi yapanın Baskın oyuncu olduğu varsayılsın. C, G çizgesinin en az üç köşe noktasına sahip, keyfi bir bileşeni olsun. İncelenmesi gereken iki durum söz konusudur. Her iki durum da incelenirken Baskın oyuncunun hamlesi belirlenerek, G' çizgesinin d' tane domine edilmiş ve s' tane doymuş köşe noktasına sahip, n köşe noktalı küçültülmüş çizgeyi gösterdiği kabul edilsin.

1. Durum: C bileşeninin bir yaprağı vardır. v köşe noktası, C bileşeninin herhangi bir yaprağı ve u da onun komşusu olsun.

Hem v köşe noktası hem de u köşe noktası domine edilmemişse, o zaman Baskın oyuncu v köşe noktasını seçer, böylece hem u hem de v köşe noktasını domine eder ve doyurur. Buradan $s' \geq s + 2$ ve $d' \geq d + 2$ sonuçları elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} \gamma_g(G) &\leq 1 + \gamma'_g(G') \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - s' - d' + 1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - (s + 2) - (d + 2) + 1) \\ &= \frac{1}{3}(2n - s - d) \end{aligned}$$

olup eşitsizlik sağlanır. Burada ilk eşitsizlik Baskın oyuncunun hamlesinin optimalliğinden, ikinci eşitsizlik G' çizgesine uygulanan tümevarım hipotezinden, üçüncü eşitsizlik ise yukarıda elde edilen sonuçlardan kaynaklanır.

Bunun yerine, v köşe noktasının domine edilmemiş fakat u köşe noktasının domine edilmiş olduğu varsayılsın. C bileşeni en az üç köşe noktasına sahip olduğundan ve domine edilmiş köşe noktaları arasında kenar bulunmadığından, bu durum u köşe noktasının v köşe noktasından farklı, domine edilmemiş bir w komşusuna sahip olduğu anlamına gelir. Bu durumda Baskın oyuncu hamlesini u köşe noktasını seçerek yapar ve dolayısıyla v ile w köşe noktalarını domine edip, u ile w köşe noktalarını doyurur. Bir önceki durumda olduğu gibi $s' \geq s + 2$ ve $d' \geq d + 2$ sonuçları elde edilerek aynı şekilde $\gamma_g(G) \leq (2n - s - d)/3$ eşitsizliği gerçeklenir.

Geriye kalan tek olasılık olan, v köşe noktasının domine edilmiş fakat u köşe noktasının domine edilmemiş olduğu varsayılsın. Eğer u köşe noktasının henüz domine edilmemiş bir w komşusu varsa, Baskın oyuncu bu w köşe noktasını seçerek hamle yapar. Böylece u ile w köşe noktalarını domine edip, v ile w köşe noktalarını doyurur. Buradan da yine $s' \geq s + 2$ ve $d' \geq d + 2$ sonuçları elde edilerek $\gamma_g(G) \leq (2n - s - d)/3$ eşitsizliğinin gerçeklendiği görülür. Son olarak eğer u köşe noktasının henüz domine edilmemiş bir komşusu yoksa, C bileşeni en az üç köşe noktasına sahip olduğundan, u köşe noktasının v köşe noktasından farklı en az bir t komşusu vardır. Bu durumda Baskın oyuncu t köşe noktasını seçerek hamle yapar. Böylece u köşe noktasını domine eder ve t ile v köşe noktalarını doyurur. u köşe noktasının domine edilmemiş komşusu bulunmadığından, bu hamle u köşe noktasını da doyurur. Buradan $s' \geq s + 3$ ve

$d' \geq d+1$ sonuçları elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\gamma_g(G) &\leq 1+\gamma_g'(G') \\
&\leq 1+\frac{1}{3}(2n-s'-d'+1) \\
&\leq 1+\frac{1}{3}(2n-(s+3)-(d+1)+1) \\
&= \frac{1}{3}(2n-s-d)
\end{aligned}$$

olup eşitsizlik yine sağlanır.

2. Durum: C bileşeninin yaprağı yoktur. İlk olarak C bileşenindeki bazı domine edilmemiş v köşe noktalarının, en az iki domine edilmemiş komşusu olduğu varsayılsın. Bu durumda Baskın oyuncu v köşe noktası ve onun domine edilmemiş komşuları olmak üzere, en az üç köşe noktasını domine eden v köşe noktasını seçerek hamlesini yapar. Aynı zamanda bu hamle ile v köşe noktasını doyurur. Buradan $s' \geq s+1$ ve $d' \geq d+3$ sonuçları elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\gamma_g(G) &\leq 1+\gamma_g'(G') \\
&\leq 1+\frac{1}{3}(2n-s'-d'+1) \\
&\leq 1+\frac{1}{3}(2n-(s+1)-(d+3)+1) \\
&= \frac{1}{3}(2n-s-d)
\end{aligned}$$

olup eşitsizlik sağlanır.

C bileşeninde hiçbir domine edilmemiş köşe noktasının, iki veya daha fazla domine edilmemiş komşusunun var olmadığı durum incelenmelidir. Aksi halde istenen sınırın geçerli olduğu yukarıda görülmüştür. C bileşenindeki bazı domine edilmemiş köşe noktalarının, tam olarak bir tane domine edilmemiş komşusu olduğu varsayılsın. u köşe noktası, v köşe noktasının domine edilmemiş komşusu olsun. Varsayım gereği, u köşe noktasının başka domine edilmemiş komşusu yoktur. Baskın oyuncu hamlesini u köşe noktasını seçerek yapar. Bu hamle hem u hem de v köşe noktasını domine eder ve doyurur. Buradan $s' \geq s+2$ ve $d' \geq d+2$ sonuçları elde edilerek daha önce olduğu gibi $\gamma_g(G) \leq (2n-s-d)/3$ eşitsizliği gerçeklenir.

Kalan son olasılık olan, C bileşeninin hiçbir domine edilmemiş komşu köşe noktası çifti içermediği varsayılsın. G' izole edilmemiş ve domine edilmemiş bir köşe noktası içermediğinden, C en az bir çift komşu köşe noktası içerir. Bunlardan da en az birinin domine edilmiş olması gerekir. v köşe noktası, C bileşeninde domine edilmiş bir köşe noktası olsun. C bileşeninin yaprağı bulunmadığından, v köşe noktasının en az iki komşusu var olmalıdır. Küçültülmüş çizgede hiçbir kenar iki domine edilmiş köşe noktasını birleştiremeyeceğinden, v köşe noktasının tüm komşuları domine edilmemiştir. u ve w köşe noktaları, v köşe noktasının domine edilmemiş iki komşusu olsun. Varsayım gereği, ne u ne de w köşe noktasının domine edilmemiş komşuları yoktur. Bu durumda Baskın oyuncu hamlesini, hem u hem de w köşe noktalarını domine eden v köşe noktasını seçerek yapar. Böylece u, v ve w köşe noktalarını doyurur. Buradan $s' \geq s + 3$ ve $d' \geq d + 2$ sonuçları elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\gamma_g(G) &\leq 1 + \gamma_g'(G') \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - s' - d' + 1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(2n - (s+3) - (d+2) + 1) \\ &< \frac{1}{3}(2n - s - d)\end{aligned}$$

olup eşitsizlik yine sağlanır. Bu da ispatı tamamlar. □

KAYNAKÇA

[1] Akyar, E. (2021). *Çizge Kuramına (Graf Teorisine) Giriş*, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

[2] Bokhary, S. A. U. H. and Iqbal, T. and Ali, U. (2018). Game chromatic number of Cartesian and corona product graphs. *Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications*, 5 (3), 129–136.

[3] Enomoto H., Fujisawa J. and Matsumoto N. (2023). Game chromatic number of strong product graphs. *Discrete Mathematics*, 346 (1), 113–162.

[4] Henning, M. A. and Kinnersley W. B. (2016). Domination Game: A proof of the 3/5–Conjecture for graphs with minimum degree at least two. *SIAM Journal On Discrete Mathematics*, 30 (1), 20–35.

EKLER

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID :
Adı-Soyadı : X Y
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

-
-
-

Yayınları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- X
- Y

Ödülleri:

- X
- Y

Mesleki Birlik/Dernek/Kuruluş Üyelikleri:

- X
- Y