

BISECTRICES Y ÁNGULOS (sesión de entrenamiento dirigido #01)

Dr. Héctor Flores

Universidad Autónoma de Nuevo León, Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Instrucciones

Este documento es un *entrenamiento dirigido* lo que significa que está redactado a manera de monólogo, pero con indicaciones para el lector. Se sugiere separar entre 10 y 20 minutos a su lectura y tener a la mano hojas blancas, material para escribir y juego de geometría. Al final trata de encontrar a alguien para discutir las ideas que hayas tenido y especialmente para comentar las tuyas.

Objetivos

El objetivo no es simplemente resolver los problemas, sino utilizarlos para desarrollar nuestras habilidades de razonamiento. No pienses que "acabaste" solo porque encuentres la respuesta. Cada problema es una oportunidad de aprendizaje y es necesario que entiendas los puntos de vista de otras personas y sus formas de razonar. Esta es la única forma que conozco de desarrollar las habilidades de razonamiento.

Introducción

Lo más apasionante de las olimpiadas de matemáticas es que los acertijos no requieren saber muchas cosas. Es más importante la imaginación y las estrategias intelectuales de razonamiento.

Empecemos con un problema de geometría tomado del libro [1]. Dedicar al menos 5 minutos a tratar de resolver este problema por tu propia cuenta sin consultar ninguna fuente de información externa.

Problema de muestra

Imagina un triángulo ABC y dos puntos D, E en los lados BC, AC respectivamente. Las bisectrices internas de los ángulos $\angle DAC$ y $\angle CBE$ se cortan en el punto F . Demuestra que la medida de $\angle AFB$ es el promedio de las medidas de $\angle AEB$ y $\angle ADB$.

Entendimiento del problema

Para este problema suponemos que conoces los conceptos de triángulo y ángulos. El único concepto con el que puedes tener dificultades es el de "bisectriz interna".

Un *ángulo* es la figura geométrica formada por dos semirrectas que tienen un vértice común. Se le llama *bisectriz interna* al lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de ambas semirrectas. En la figura siguiente las semirrectas que forman el ángulo están de color negro, el vértice está marcado y la recta roja indica la bisectriz interna. Aprovechamos el espacio para marcar una recta azul perpendicular a la bisectriz interna a la cual se le llama *bisectriz externa*.

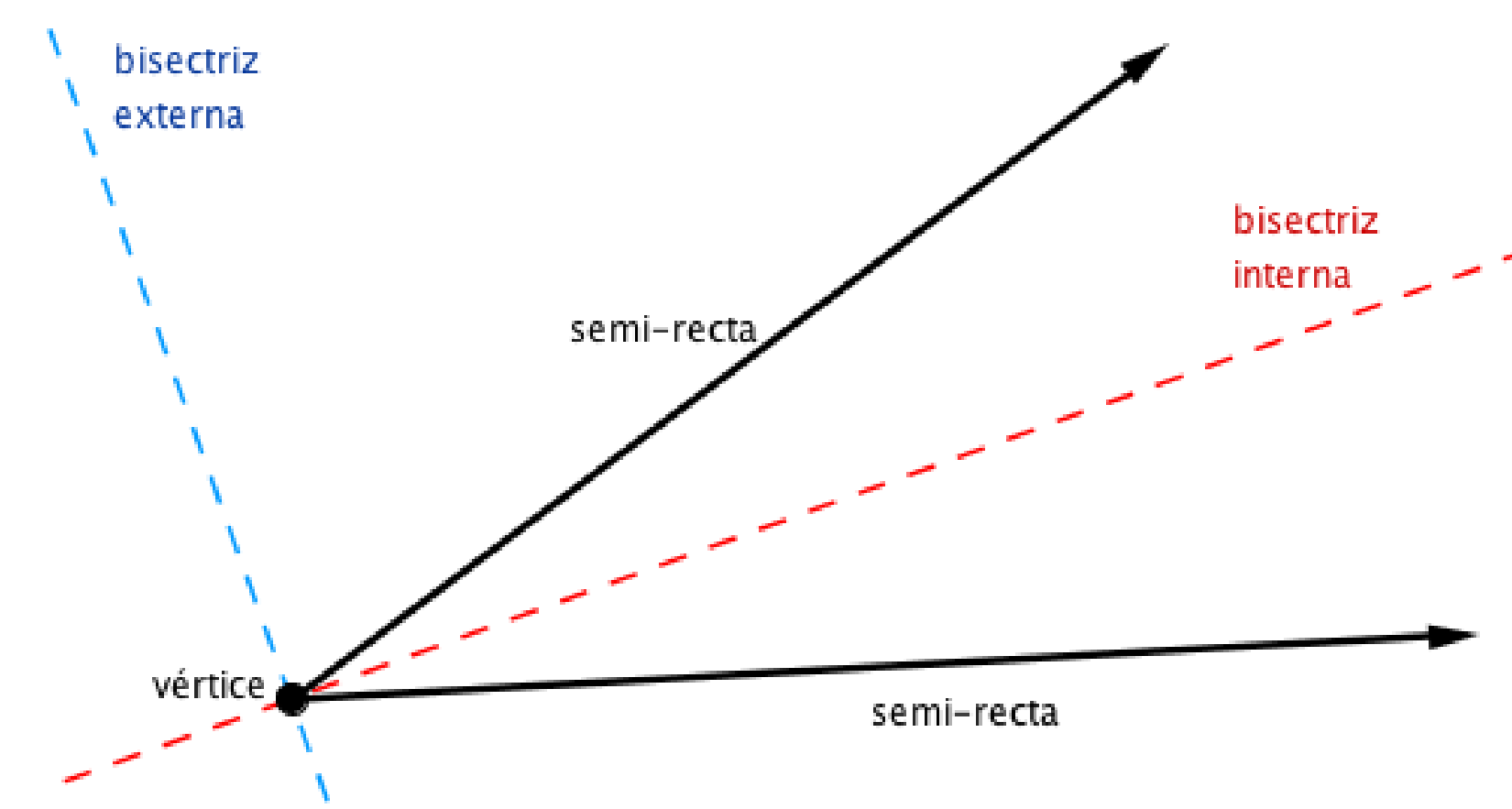


Fig. 1: Bisectrices de un ángulo

Planteamiento de situación

En problemas de geometría, el entendimiento se demuestra trazando una figura clara que refleje toda la información del problema. El diagrama siguiente presenta todo lo que dice el problema incluyendo la definición de variables para los ángulos involucrados. Quisiera hacer notar algunas sugerencias generales.

- 1 Explora diferentes configuraciones y evita los puntos o rectas empalmadas.
- 2 Usa el mínimo de variables que sea posible.
- 3 La información de bisectrices se refleja mejor con variables.
- 4 No traces nada que no esté en el problema hasta que sea necesario hacerlo.

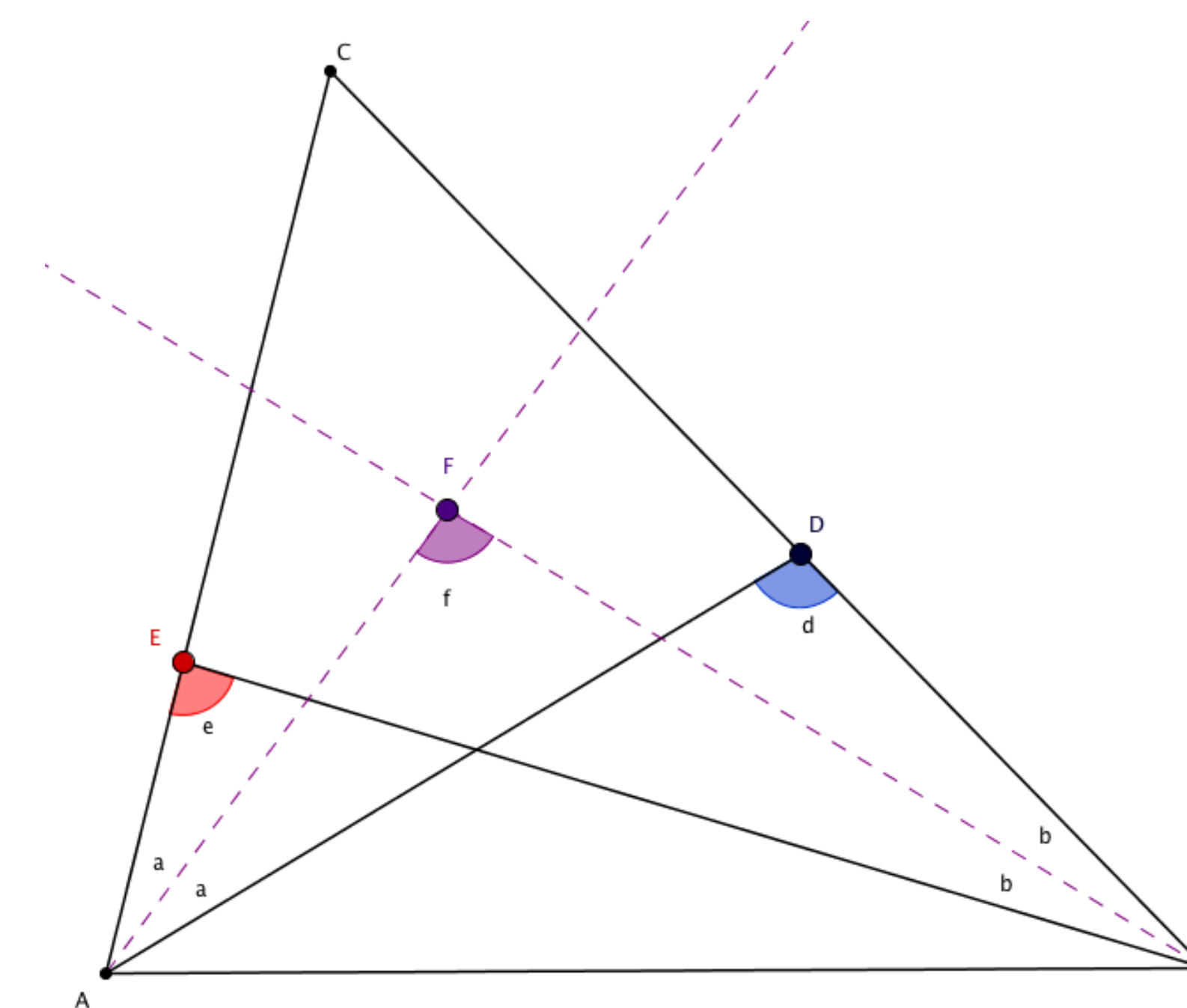


Fig. 2: Diagrama del problema

Análisis/Observación

La parte creativa en la solución de problemas es el análisis de la situación. En este caso procuramos detectar patrones basados en nuestra experiencia previa. En este problema los patrones deben estar relacionados con ángulos y triángulos.

Un patrón que puedes usar es el conocido resultado de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° . Con esta idea puede resolverse el problema aunque tendrás que definir algunas variables adicionales.

Un patrón que de hecho usa mejor la información es el siguiente que involucra dos triángulos que comparten un ángulo en común.

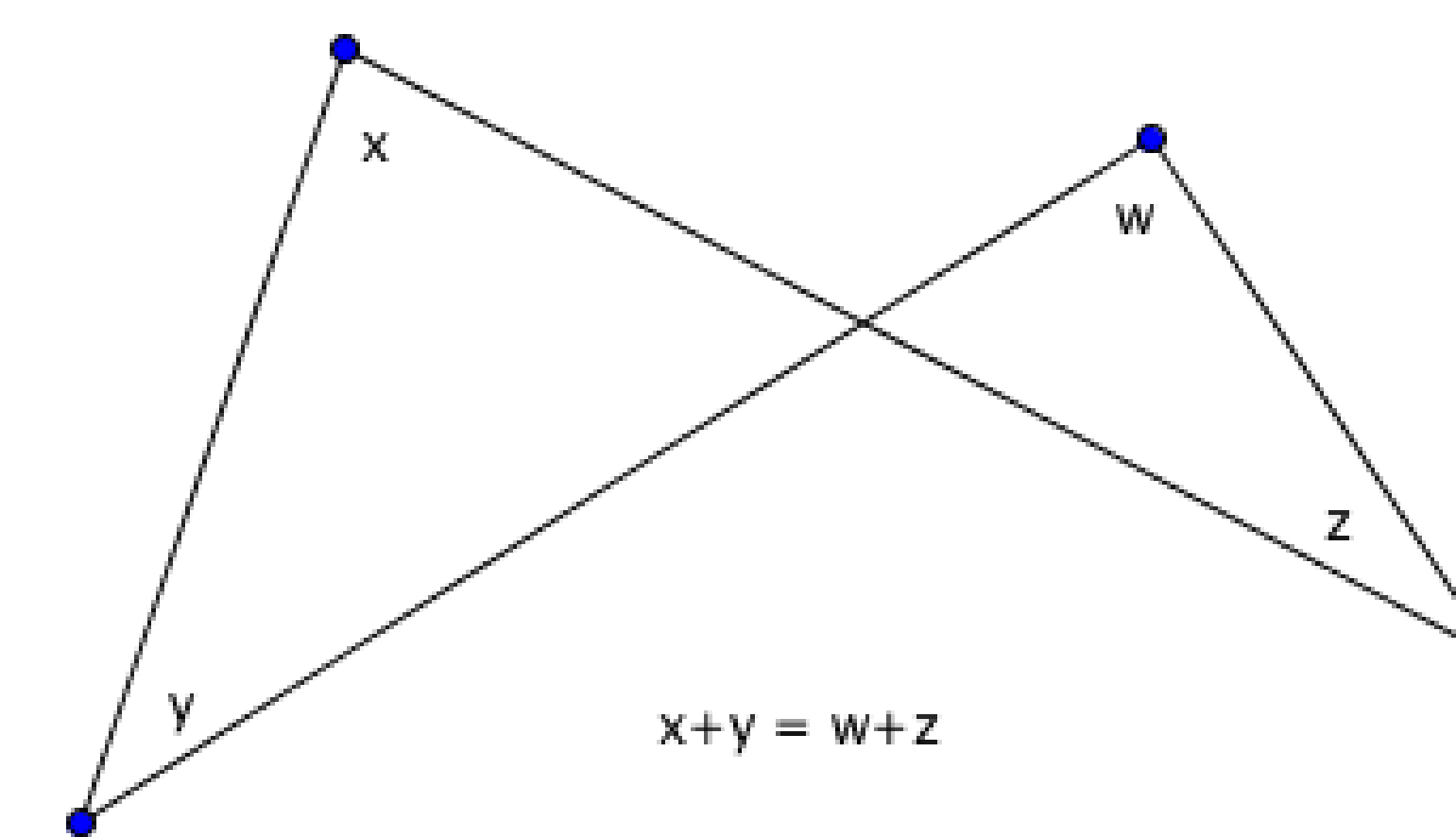


Fig. 3: Triángulos con ángulo común

La experiencia en solución de problemas se adquiere mediante el dominio de patrones como este. Aunque estos pueden deducirse de resultados básicos, el no conocerlos puede significar la diferencia entre tener o no la idea correcta en problemas complejos.

Para practicar

Para que practiques te dejamos la siguiente lista de problemas relacionados con bisectrices.

- 1 Completa la demostración del problema usando dos veces el patrón de la figura 3.
- 2 Completa la demostración del problema de muestra usando solo que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .
- 3 Analiza como se modifica el problema de muestra si los puntos D, E están en las rectas BC, AC pero fuera de los segmentos.
- 4 La bisectriz interna de $\angle B$ y la bisectriz externa de $\angle C$ de otro $\triangle ABC$ se cortan en C . Por C se traza una paralela a BC que corta AC, AB en L, M . Si sabemos que $LC = 5$ y $MB = 7$, calcula la medida de LM .
- 5 En la hipotenusa AB de un triángulo rectángulo ABC se consideran puntos D, E, F de modo que $CD \perp AB$, CE es bisectriz interna de $\angle BCA$ y F es punto medio de AB . Demuestra que CE también es bisectriz de $\angle DCF$.
- 6 El segmento PC es perpendicular a la hipotenusa AC de un triángulo rectángulo ABC . Demuestra que BP es perpendicular o paralelo a la bisectriz de $\angle BAC$.

References

- [1] Posamentier and Salkind.
Challenging Problems in Geometry.
Dover, 1996.

Información de contacto

Olimpiadas de Matemáticas en Nuevo León

- Web: <http://olmatnl.blogspot.mx/>
- Facebook: <https://www.facebook.com/olmatnl>
- Email: MatematicasNuevoLeon@gmail.com