Álgebra Linear

Azuaite A. Schneider

Instituto Federal do Paraná - Campus de Paranavaí

azuaite.schneider@ifpr.edu.br

21 de agosto de 2018

Cálculo do Determinante

- Ordem 1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}_{1\times 1} \quad \Rightarrow \qquad det(A) = a_{11}$$

Cálculo do Determinante

- Ordem 1:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}_{1\times 1} \quad \Rightarrow \quad det(A) = a_{11}$$

- Ordem 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Cálculo do Determinante

- Ordem 1:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c} a_{11} \end{array} \right)_{1\times 1} \quad \Rightarrow \quad det(A) = a_{11}$$

- Ordem 2:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right)_{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Ordem 3:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)_{3\times 3} \quad \Rightarrow \quad det(A) = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Exemplos

Exemplo 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}_{1\times 1}$$

$$\Rightarrow \qquad det(A) = -6$$

Exemplo 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\Rightarrow \qquad det(A) = 1(-4) - (-2)3 = -4 + 6 = 2$$

Exemplo 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\Rightarrow \qquad det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 4 & -2 \end{array} \right. = 63 - 6 = 57.$$

Desenvolvimento de Laplace

Vimos que

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expressa em função dos determinantes de submatrizes 2×2, isto é

$detA = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|$, onde A_{ij} é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas. Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|, \text{ obtemos}$$

$$detA = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

Caso Geral $n \times n$

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, então

$$detA = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

onde Δ_{ij}é chamado cofator de a_{ij}.

Exemplo

Calcule o determinante:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Solução:

$$detA = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} + a_{24}\Delta_{24} = 4\Delta_{21} + 2\Delta_{22} + 0\Delta_{23} + 0\Delta_{24}$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3.(-52) = 52$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4.2 = 2$$

$$\therefore detA = 4.52 + 2.2 = 212$$

Matriz Adjunta e Matriz Inversa

Definição

Matriz dos cofatores de A é a formada pelos cofatores Δ_{ij} *da matriz A.*

$$\underbrace{\bar{\mathrm{A}}}_{\text{Matriz dos cofatores}} = (\Delta_{ij})_{\text{ordem igual a de A}}$$

Exemplo

Determine a matriz dos cofatores da matriz A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Solução

$$\bar{\mathrm{A}} = (\Delta_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 1.(5 - 24) = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1.(-15 - 4) = 19$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 1.(-18 - 1) = -19$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -1.(5) = 5$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.(10) = 10$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -1.(12 - 1) = -11$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.(4) = 4$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -1.(8) = -8$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1.(2+3) = 5$$

$$\bar{\mathrm{A}} = (\Delta_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Definição

Dada uma matriz quadrada A, chamamos de matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

$$Adj(A) = (\bar{\mathrm{A}})^t$$

Exemplo

Pelo exemplo anterior, temos que a matriz adjunta de A é dada por:

$$Adj(A) = (\bar{\mathrm{A}})^t = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Calculando agora $A.adj(A) temos$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -38+19 & -10+10 & 8-8 \\ 57+19-76 & 15+10-44 & -12-8+20 \\ -19+144-95 & -5+60-55 & 4-48+25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} = (-19).I_3$$

Como

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

Temos que

$$A.adj(A) = det(A).I$$

Teorema

Se A é uma matriz quadrada, então:

$$A.adj(A) = det(A).I_n$$

Demonstração: Sendo

$$A.adj(A) = (c_{uv})_{n\times n}$$

temos que

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}.\Delta_{vk}$$ [1]

Assim, se

$$u = v \Rightarrow c_{uu} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}.\Delta_{uk}$$

$$c_{uu} = a_{u1}\Delta_{u1} + a_{u2}\Delta_{u2} + \cdots + a_{un}\Delta_{un} = detA$$ [2]

[1] A $adj(A)$ é a transposta da matriz dos cofatores, portanto, temos Δ_{vk} e não Δ_{kv}.

[2] Pelo desenvolvimento de Laplace.

Se $u \neq v$

$$\Rightarrow c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}.\Delta_{vk}$$

$$= a_{u1}\Delta_{v1} + a_{u2}\Delta_{v2} + \cdots + a_{un}\Delta_{vn} = detB = 0$$

onde B é uma matriz obtida a partir da substituição da linha v pela linha u da matriz A. Então as linhas u e v da matriz B são idênticas, logo pela propriedade P5 da aula anterior temos que $detB = 0$.

Assim,
$c_{uv} = detA$, se $u = v$ e
$c_{uv} = 0$, se $u \neq v$.

$$\therefore A.adj(A) = (c_{uv})_n = (detA).I_n \qquad \blacksquare$$

Definição

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que

$$AB = BA = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos A^{-1} para a inversa de A.

Observação

Vimos anteriormente, que

$$A.adj(A) = (detA).I_n$$

Então $A.\dfrac{adjA}{detA} = I_n$ se $detA \neq 0$.Deste modo,

$$\frac{1}{detA}.adjA = A^{-1}.$$

Teorema

Uma matriz quadrada A admite inversa se, e somente se, $detA \neq 0$.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Observação anterior.

($\Rightarrow$) Se A admite inversa, então existe uma matriz B tal que,

$$A.B = I_n$$

$$\Rightarrow det(AB) = det(I_n)$$

$$detA.detB = 1$$

$$detA \neq 0 \qquad \blacksquare$$

Definição

Dizemos que uma matriz A é singular se $detA = 0$ e é não-singular se $detA \neq 0$.

Exemplo

Vimos no último exemplo que a adjunta da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ é a matriz $adjA = \begin{pmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{pmatrix}$ e que o determinante de A é $detA = -19$. Assim pela última observação temos que a inversa de A existe e é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA = \begin{pmatrix} 1 & 5/19 & -4/19 \\ -1 & -10/19 & 8/19 \\ 1 & 11/19 & -5/19 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Solução

$$detA = ad - bc \text{ e } \bar{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}, \text{ logo}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}|d| = d$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}|c| = -c$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}|b| = -b$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}|a| = a$$

$$\therefore \bar{A} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Assim,

$$adjA = (\bar{A})^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.adjA$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{detA} & \dfrac{-b}{detA} \\ \\ \dfrac{-c}{detA} & \dfrac{a}{detA} \end{pmatrix}$$

Sub-exemplo

Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Propriedades

Propriedade 1

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis, então AB também é inversível.

De fato,

$$AB.X = I_n$$

$$(A^{-1}).ABX = A^{-1} \cdot I_n$$

$$BX = A^{-1}$$

$$B^{-1}BX = B^{-1}A^{-1}$$

$$X = B^{-1}A^{-1}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Propriedade 2

Nem toda matriz tem inversa (basta ser singular, ou seja, $detA = 0$).

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = 4 - 4 = 0$$

$$\therefore A^{-1} \text{ não existe!}$$

Observe que se $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teríamos que $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x + 4z = 0 \\ y + 2w = 0 \\ 2y + 4w = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} & 2(x + 2z = 0) \\ & \Rightarrow 2.1 = 0 \quad (Absurdo!) \\ & 2(y + 2w) = 1 \\ & \Rightarrow 2.0 = 1 \quad (Absurdo!) \end{aligned}$$

Propriedade 3

Se A tem inversa, então $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$

De fato,

$$A.A^{-1} = I_n$$

$$det(A.A^{-1}) = det(I_n)$$

$$detA.detA^{-1} = 1$$

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA} \qquad pois \quad detA \neq 0$$

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um outro método de resolução de sistemas lineares de equações.
Este só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.
Suponha que queremos resolver o seguinte sistema linear.

$$(*) = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Na forma matricial temos:

$$AX = B$$

Suponha que $detA \neq 0$
Então existe A^{-1} tal que $A^{-1}.A = I_n$.
Assim,

$$X = A^{-1}B \qquad \Rightarrow \qquad X = \frac{adjA}{detA}B$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Desse modo,

$$x_1 = \frac{b_1\Delta_{11} + b_2\Delta_{21} + \cdots b_n\Delta_{n1}}{detA}$$

$$x_2 = \frac{b_1\Delta_{12} + b_2\Delta_{22} + \cdots b_n\Delta_{n2}}{detA}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{b_1\Delta_{1n} + b_2\Delta_{2n} + \cdots b_n\Delta_{nn}}{detA}$$

Ou seja,

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{detA}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a11 & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{detA}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{detA}$$

Portanto, podemos generalizar a solução de cada incógnita através da expressão:

$$\boxed{x_i = \frac{detA_i}{detA}, 1 \leq i \leq n}$$

Onde A_i é a matriz obtida pela troca da coluna i da matriz A pela coluna 1 da matriz B.

Exemplo

Determine a solução do sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

Solução:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad detA_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 49$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9 \qquad detA_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

$$x = \frac{detA_1}{detA} = \frac{49}{-1} = -49$$

$$y = \frac{detA_2}{detA} = \frac{-9}{-1} = 9$$

$$z = \frac{detA_3}{detA} = \frac{-18}{-1} = 18.$$

Matrizes Elementares

Exemplo

Considere a matriz A, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Temos que

$$A' = \begin{array}{c} L_1 \\ 2L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A''' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ 2L_1 - L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definição

Uma matriz elementar é uma matriz obtida a partir da identidade, através da aplicação de uma operação elementar com linhas.

Teorema

Seja A uma matriz qualquer, o resultado da aplicação de uma operação elementar com as linhas de A é o mesmo que o resultado da multiplicação da matriz elementar E correspondente à operação com as linhas pela matriz A.

Corolário

Uma matriz elementar E_1 é inversível e sua inversa é a matriz elementar E_2 que corresponde à operação com linhas inversa da operação efetuada por E_1.

Exemplo

Determine a matriz elementar E_2, inversa da matriz elementar

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, $det E_1 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad E_1$ admite inversa (não-singular).

Assim,

$$E_1.E_2 = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} a = 1 & d = 0 & g = 0 \\ b = 0 & e = 1/2 & h = 0 \\ c = 0 & f = 0 & i = 1 \end{array}$$

$$\therefore E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Determine a matriz elementar E_2, inversa da matriz elementar

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$detE_1 = -1 \neq 0 \Rightarrow E_1$ admite inversa.
Assim,

$$E_1.E_2 = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a = f = h = 1 \\ b = c = g = i = d = e = 0 \end{array}$$

$$\therefore E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

Determine a matriz elementar E_2, inversa da matriz elementar

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; xL_1 - yL_2$$

$detE_1 = -y \neq 0, \Rightarrow E_1$ admite inversa.
Assim,

$$E_1.E_2 = I_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ ax-dy & bx-ey & cx-fy \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} a=1 & ax-dy=0 \Rightarrow d=x/y & g=0 \\ b=0 & bx-ey=1 \Rightarrow e=-1/y & h=0 \\ c=0 & cx-fy=0 \Rightarrow f=0 & i=1 \end{array}$$

$$\therefore E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x/y & -1/y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (xL_1 - L_2)/y$$

$L_i' = kL_i$

$$L_i' = kL_i \quad \overset{\text{Inv}}{\rightsquigarrow} \quad L_i = kL_i' \quad \Rightarrow \quad L_i' = \frac{L_i}{k}$$

$L_i' = L_j$

$$\begin{array}{c} L_i' = L_j \\ L_j' = L_i \end{array} \quad \overset{\text{Inv}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{array}{c} L_i = L_j' \\ L_j = L_i' \end{array}$$

$L_i' = xL_j - yL_i$

$$L_i' = xL_j - yL_i \quad \overset{\text{Inv}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{array}{c} L_i = xL_j - yL_i' \\ yL_i' = xL_j - L_i \Rightarrow L_i' = (xL_j - L_i)/y \end{array}$$

Exemplo

Determine a inversa da matriz elementar dada

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$L_4' = 3L_2 - 4L_4 \rightsquigarrow L_4 = 3L_2 - 4L_4' \Rightarrow -4L_4' = L_4 - 3L_2 \Rightarrow L_4' = \frac{3L_2 - L_4}{4}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Procedimento para a inversão de uma Matriz

Teorema

Se A é uma matriz inversível, sua matriz-linha reduzida à forma escalonada, é a identidade. Além disso, é dada por um produto de matrizes elementares.

De acordo com o teorema acima temos que

$$I_n = A.E_1 E_2 \ldots E_{n-1} E_n$$

$$\Rightarrow E_1 E_2 \ldots E_n = A^{-1}$$

$$\Rightarrow E_n E_{n-1} \ldots E_2 E_1.I = A^{-1}$$

Teorema

Se uma matriz A pode ser reduzida à matriz identidade, por uma sequncia de operações elementares com linhas, então A é inversível e a matriz inversa de A é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma sequência de operações com linhas.

Exemplo

Determine, se existir, a inversa da matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solução:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1a Etapa (Pivô a_{11})

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \\ L_3 \\ L_1 + 2L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

2a Etapa (Pivô a_{22})

$$\begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ L_2 \\ L_2 - L_3 \\ L_2 - L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:cccc} -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

3a Etapa (Pivô a_{33})

$$\begin{array}{c} 2L_3 - L_1 \\ 2L_3 - L_2 \\ L_3 \\ 2L_3 - L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 0 & 0 & -4 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

4a Etapa (Pivô a_{44})

$$\begin{array}{c} 2L_4 + L_1 \\ 2L_4 + L_2 \\ 3L_4 + 2L_3 \\ L_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -6 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & -10 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

5a Etapa (I_n)

$$\begin{array}{c} L_1/2 \\ L_2/-1 \\ L_3/2 \\ L_4/2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício

Determine, se existir, a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solução:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/15 & 4/15 \\ 2/5 & 1/15 & -2/15 \\ -1/5 & 2/15 & 7/30 \end{pmatrix}$$