Tuyển tập

BỘ BA CÂU PHÂN LOẠI

TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ THPT QUỐC GIA 2015

MÔN TOÁN

* PT, HPT, BPT
* PP tọa độ trong MP
* BĐT, Tìm GTLN, GTNN

DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC

TUYỂN TẬP BỘ BA CÂU PHÂN LOẠI TRONG ĐỀ THI THỬ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA 2015

VMF

Ngày 6 tháng 10 năm 2015

LỜI NÓI ĐẦU

Xuất phát từ thực tế kì thi THPT Quốc gia 2015, với các bạn sử dụng kết quả môn Toán để xét tuyển đại học, thì sự cạnh tranh chủ yếu diễn ra ở bộ ba câu phân loại. Bộ ba câu này thường rơi vào các chủ đề Phương trình - Bất phương trình - Hệ phương trình, Hình học tọa độ phẳng, Bất đẳng thức - Tìm GTLN NN.

Nhằm mục đích cung cấp thêm cho các bạn chuẩn bị tham gia kì thi THPT Quốc gia 2016 một tài liệu tham khảo hữu ích, các thành viên của diễn đàn toán học VMF đã cùng nhau biên soạn tài liệu này. Tài liệu tổng hợp lại các câu hỏi thuộc 3 chủ đề nói trên trong các đề thi thử năm học 2014 - 2015. Phần hướng dẫn, đáp số chúng tôi chủ yếu dựa trên đáp án của đơn vị ra đề, tuy nhiên trong một số bài toán chúng tôi có đưa ra cách tiếp cận khác, hoặc chỉ hướng dẫn sơ lược có đáp số nhằm giúp bạn đọc chủ động hơn trong quá trình đọc tài liệu. Chúng tôi nhấn mạnh rằng, cách làm trong tài liệu này chưa hẳn là tốt nhất, bạn đọc cũng không nên quá coi trọng các lời giải mang đậm chất kĩ thuật, khó định hướng tự nhiên.

Nhóm biên soạn tài liệu này gồm có

•Bạn Trần Tuấn Anh, Nguyễn Nguyên Trang - Sinh viên khoa Toán ĐHSP TP.HCM (Katyusha);
•Bạn Trương Việt Hoàng - THPT Nguyễn Du, Thái Bình (Viet Hoang 99);
•Thầy Châu Ngọc Hùng - Ninh Thuận (hungchng);
•Thầy Nguyễn Công Định - Cà Mau (CD13);
•Thầy Hoàng Ngọc Thế - Hà Nội (E.Galois);
•Thầy Lê Minh An - Nam Định (leminhansp).

Mặc dù chúng tôi đã cùng nhau biên soạn tài liệu này với tất cả sự tận tâm, tinh thần vì cộng đồng vô tư. Nhưng sự tỉ mỉ và cố gắng của chúng tôi chắc chắn chưa thể kiểm soát được hết các sai sót. Vì vậy sự nhiệt tâm từ phía bạn đọc cũng sẽ giúp tài liệu hoàn thiện hơn. Mọi trao đổi hãy chia sẻ với chúng tôi tại diễn đàn toán học VMF. http://diendantoanhoc.net/forum/

Sau cùng, chúng tôi hi vọng cộng đồng chia sẻ trực tuyến sẽ dành cho chúng tôi sự tôn trọng tối thiểu bằng cách ghi rõ nguồn tài liệu khi chia sẻ. Không dùng tài liệu này để trục lợi cá nhân. Chúng tôi xin cảm ơn!

Nhóm biên tập

V. HƯỚNG DẪN VÀ LỜI GIẢI

1 Đề 1

Bài 1

Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3(x^2-2x-2)}$.

Hướng dẫn

ĐK: $x \geq 1+\sqrt{3}$.
Bình phương hai vế rút gọn ta được

$$\sqrt{x(x+1)(x-2)} \geq x^2-4x-2 \iff \sqrt{(x^2-2x)(x+1)} \geq (x^2-2x)-2(x+1)$$

Phương trình có dạng $uv = u^2-2v^2 \iff (u+v)(2v-u) > 0$ với $u+v>0$, nên ta suy ra được

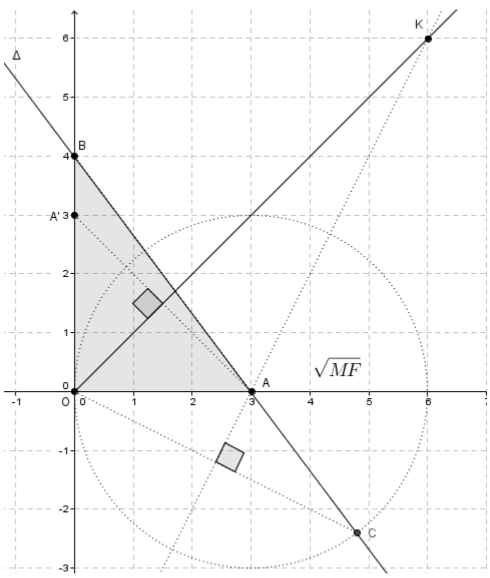
$$\sqrt{x^2-2x} \geq 2\sqrt{x+1} \iff x^2-6x-4 \geq 0 \iff x \in [3-\sqrt{13};3+\sqrt{13}].$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của BPT là $[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}]$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác OAB có các đỉnh A,B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC = AO$ và các điểm C,B nằm khác phía nhau so với A. Biết C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ A,B.

Hướng dẫn



Ta có $x_C = \frac{24}{5}$, $C \in \Delta$ nên ta có tọa độ $C\left(-\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$.
Do $AO = AC$ nên A nằm trên trung trực d của OC. Với tọa độ O,C đã biết ta tìm được d: $2x-y-6=0$.
Khi đó, $A = \Delta \cap d$ nên $A(3;0)$.
Ta có K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của tam giác OAB nên OK là phân giác góc $\widehat{AOB}$. OK: $x-y=0$.
Gọi A' là điểm đối xứng của A qua OK, ta tìm được $A'(0;3)$ và $A' \in OB$. Do đó đường thẳng OB chính là Oy và ta tìm được $B(0;4)$.
Nhận xét: Với lời giải này ta thấy bài toán có một vài giả thiết thừa, chẳng hạn giả thiết tâm đường tròn bàng tiếp, giả thiết C,B nằm khác phía so với A.

Bài 3

Cho $x \in \mathbb{R}$. Tìm GTNN của

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}.$$

Hướng dẫn

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ xét $A(x, x+1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
Khi đó ta có $P = \frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} + \frac{OC}{c}$, trong đó $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.
Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có

$$P = \frac{OA.GA}{a.GA} + \frac{OB.GB}{b.GB} + \frac{OC.GC}{c.GC} = \frac{3}{2}\left(\frac{OA.GA}{a.m_a} + \frac{OB.GB}{b.m_b} + \frac{OC.GC}{c.m_c}\right),$$

trong đó m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C của ΔABC.
Theo BĐT $AM-GM$, ta có

$$a.m_a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{3a^2(2b^2+2c^2-a^2)} \le \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{3a^2+(2b^2+2c^2-a^2)}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}.$$

Bằng cách tương tự ta cũng có $b.m_b \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$ và $c.m_c \le \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{3}}$.
Suy ra

$$P \ge \frac{3\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}(OA.GA + OB.GB + OC.GC).$$

Ta có

$$OA.GA + OB.GB + OC.GC \ge \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC}.$$

Mà

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{GC} \\ = & \overrightarrow{OG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ = & \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \end{aligned}$$

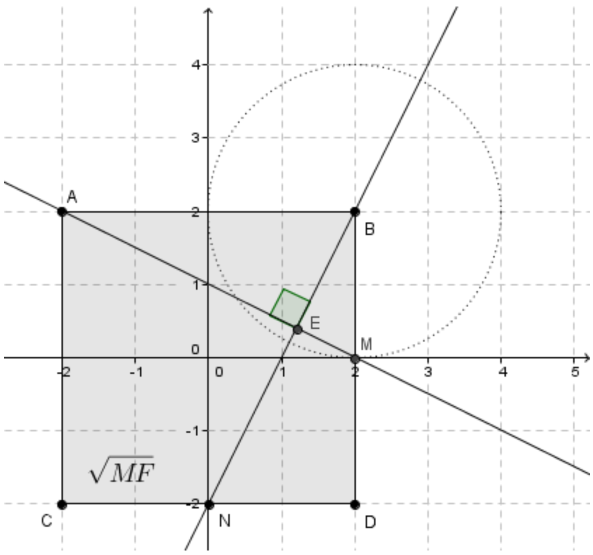
Từ đó $P \ge 3$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. Vậy $P_{\min} = \sqrt{3}$.

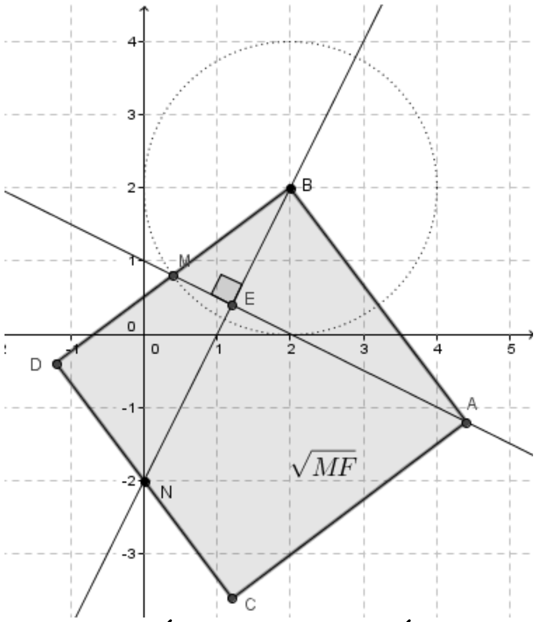
2 Đề 2

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tìm tọa độ B, M biết $N(0; -2)$, đường thẳng AM có phương trình $x + 2y - 2 = 0$ và cạnh hình vuông bằng 4.

Hướng dẫn





Chìa khóa của bài toán chính là tính chất $AM \perp BN$ (Tính chất này thường xuất hiện trong các đề thi đặc biệt thường xuất hiện với tư cách đáy của một hình chóp).
Trước hết $\Delta ABM \backsim \Delta BEM$ $(g.g)$ với $E = AM \cap BN$. Nên $AM \perp BN$.
Từ đó tìm được BN: $2x - y - 2 = 0$ và $E\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right)$.
Mặt khác ta cũng tính được $BE = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $EN = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. Nên $\overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{EN}$, suy ra $B(2;2)$.
Lại có $BM = 2$ nên M thuộc đường tròn (C) tâm B bán kính 2. (C): $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.
$M = AM \cap (C)$ nên ta tìm được 2 điểm M thỏa mãn: $M_1(2;0)$, $M_2\left(\frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3 + 3x + (9y-7)\sqrt{6-9y} = 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + y^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{109}{81} = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Quan sát phương trình (1) của hệ ta thấy có thể độc lập thành hai phần, chỉ chứa x và chỉ chứa y. Phần chứa x có bậc 3, phần chứa y có dạng $u\sqrt{u} = (\sqrt{u})^3$ nên ta sẽ nghĩ đến việc dùng phương pháp hàm, với hàm đặc trưng là một hàm bậc 3.

$$(1) \iff (3x)^3 + 3x = (6-9y)\sqrt{6-9y} + 6 - 9y. \quad (*)$$

Dễ thấy hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$(*) \iff f(3x) = f(\sqrt{6-9y}) \iff 3x = \sqrt{6-9y} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{2}{3} - x^2 \end{cases}.$$

Thế vào phương trình (2) ta được $\frac{1}{3}x^2 + (\frac{2}{3} - x^2)^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{109}{81} = 0$.
Vế trái của phương trình trên là hàm đồng biến trên $(0; \frac{2}{3})$, lại thử thấy $x = \frac{1}{3}$ là một nghiệm nên hệ có nghiệm duy nhất $(\frac{1}{3}; \frac{5}{9})$.

Bài 3

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = 5^{2x} + 5^y$, biết $x \ge 0,\ y \ge 0, x + y = 1$.

Hướng dẫn

Ta có $x + y = 1 \iff y = 1 - x$, nên $P = 5^{2x} + \dfrac{5}{5^x}$.

Đặt $t = 5^x$ thì $t \in [1;5]$. Xét $f(t) = t^2 + \dfrac{5}{t}$ với $t \in [1;5]$.

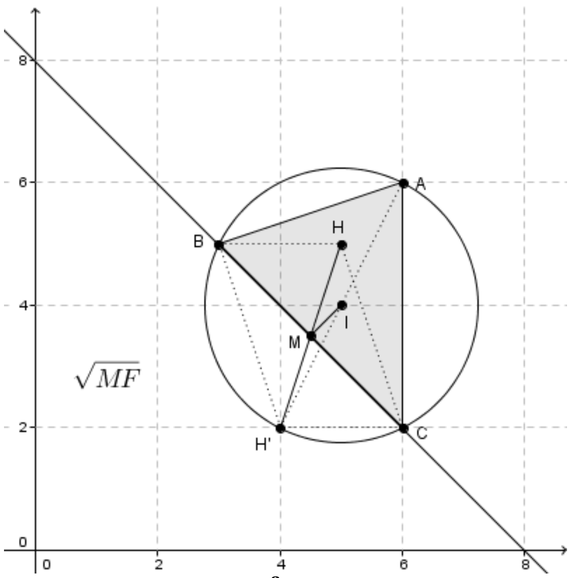
Ta tìm được $P_{\min} = f\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}\right) = 3\sqrt[3]{\dfrac{25}{4}}$, $P_{\max} = f(5) = 26$.

3 Đề 3

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy tính diện tích tam giác ABC biết $H(5;5)$, $I(5;4)$ lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và cạnh BC nằm trên đường thẳng $x + y - 8 = 0$.

Hướng dẫn



Đây là một dạng hình rất quen thuộc đối với các bạn lớp 9. Nói như thế để thấy rằng các bạn có kiến thức hình phẳng lớp 9 tốt thì sẽ có lợi thế lớn trong chủ đề này.

Gọi M là hình chiếu của I lên BC, thì $M\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ và M là trung điểm BC.

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua M, thì $H'(2;4)$ và tứ giác $HBH'C$ là hình bình hành.

Do đó $H'C \parallel BH$, mà $BH \perp AC$ nên $\widehat{ACH'} = 90^o$, tương tự cũng có $\widehat{ABH'} = 90^o$. Suy ra tứ giác $ABH'C$ nội tiếp đường tròn đường kính AH'.

Từ đó I là trung điểm của AH', suy ra $A(6;6)$.

Lại có $BC = 2MC = 2\sqrt{R^2 - MI^2} = 3\sqrt{2}$. Và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}d(A, BC).BC = 6$.

Nhận xét: Ta có thể lấy điểm phụ H' khác là giao của AH với đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Bài 2

Giải phương trình $(x - \ln x)\sqrt{2x^2 + 2} = x + 1$.

Hướng dẫn

Đk: $x > 0$. phương trình tương đương với $x - \ln x = \dfrac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$. $(*)$

Bằng cách xét hàm ta sẽ chỉ ra được $(*)$ có $VT \le 1$ và $VP \ge 1$, đẳng thức đều xảy ra khi $x = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 3

Cho $0 < x < y < z$. Tìm GTNN

$$P = \frac{x^3 z}{y^2(xz+y^2)} + \frac{y^4}{z^2(xz+y^2)} + \frac{z^3+15x^3}{x^2 z}.$$

Hướng dẫn

Đặt $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$, suy ra $abc = 1$, $c > 1$ và

$$P = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^3}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}} + \frac{\left(\frac{y}{z}\right)}{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}} + \left(\frac{z}{x}\right)^2 + \frac{15}{\frac{z}{x}} = \frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{a+b} + c^2 + \frac{15}{c}.$$

Ta có $a^3 + b^3 \ge ab(a+b) \Longrightarrow \dfrac{a^3}{a+b} + \dfrac{b^3}{a+b} \ge ab = \dfrac{1}{c}$. Suy ra $P \ge \dfrac{1}{c} + c^2 + \dfrac{15}{c} = c^2 + \dfrac{16}{c}$.
Xét $f(c) = c^2 + \dfrac{16}{c}$ với $c \in (1; +\infty)$ ta được $f(c) \ge f(2) = 12$.
Vậy $P_{\min} = 12$ khi $z = \sqrt{2}y = 2x$.

4 Đề 4

Bài 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $\begin{cases} 2x \ge y+1 \\ y \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge 0 \\ x + 2y \ge 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \ge -\dfrac{1}{3} \\ x \ge \dfrac{1}{3} \\ x + 2y \ge 0 \end{cases}$.

Ở phương trình (1), quan sát các biểu thức dưới căn (hoặc sử dụng Casio), ta sẽ tìm được mối liên hệ giữa các biến định hướng cho các biến đổi sau

$$\begin{aligned}
(1) &\Longleftrightarrow (\sqrt{2x-y-1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x-2y} - \sqrt{3y-1}) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x}} - \frac{x-y-1}{\sqrt{x-2y}+\sqrt{3y-1}} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y - 1 = 0 & (3) \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{x-2y} - \sqrt{3y-1} & (4) \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

(3) $\iff y = x-1$ thế vào (2) ta được phương trình bậc 3 ẩn x có hai nghiệm $x=1$, $x=5$. Suy ra nghiệm hệ $(1;0)$ và $(5;4)$.
Với phương trình (4), làm tương tự với (1) ta sẽ có biến đổi

$$(4) \iff \left(\sqrt{2x-y-1}-\sqrt{x+2y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{3y-1}\right)=0$$

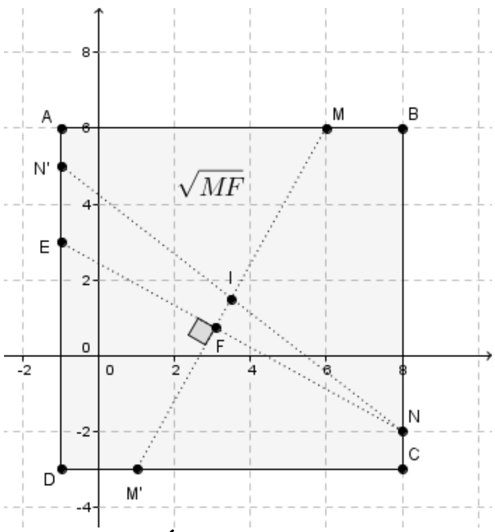
$$\iff \left[\begin{array}{l} x-3y-1=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2x-y-1}+\sqrt{x+2y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3y-1}}=0 \quad \textit{(Vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Với $x-3y-1=0$ thế vào (2) ta cũng sẽ tìm được $x=1$. Vậy hệ có hai nghiệm $(1;0)$; $(5;4)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Điểm $M(6;6)\in AB$ và $N(8;-2)\in BC$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông.

Hướng dẫn



Ta tìm được tọa độ $M'(1;-3)$ đối xứng với M qua I, $N'(-1;5)$ đối xứng với N qua I.
Gọi F là hình chiếu của N lên MM', do đã biết tọa độ N, viết được phương trình MM' nên ta tìm được tọa độ $F\left(\dfrac{163}{53};\dfrac{39}{53}\right)$.
Mặt khác, ta lại chứng minh được $NE = MM'$ ($\Delta MM'P = \Delta NEQ$, với P là hình chiếu của M lên CD, Q là hình chiếu của N lên AD.).
Từ đó ta có $\overrightarrow{NF}=\dfrac{NF}{MM'}\overrightarrow{NE}$, do độ dài NF, MM' tính được, tọa độ N,F đã biết nên ta sẽ suy ra tọa độ $E(-1;3)$.
Khi đó ta viết được phương trình AD (qua E,N'); phương trình AB, CD (lần lượt qua M, M' vuông góc với AD) và tìm được tọa độ $A(-1;6)$, $D(-1;-3)$. Do I là trung điểm AC, BD nên cũng tìm được $C(8;-3)$, $B(8;6)$.

Bài 3

Cho $x,y,z\in(0;1)$ thỏa mãn $(x^3+y^3)(x+y)=xy(1-x)(1-y)$. Tìm GTLN

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+3xy-(x^2+y^2).$$

Hướng dẫn

Ta có

$$(x^3+y^3)(x+y)=xy(1-x)(1-y) \iff \left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)(x+y)=(1-x)(1-y).$$

Mà $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)(x+y)\geq 4xy$ và $(1-x)(1-y)=1-(x+y)+xy\leq 1-2\sqrt{xy}+xy$.
Suy ra

$$1-2\sqrt{xy}+xy\geq 4xy \iff 0<xy\leq \frac{1}{9}.$$

Mặt khác $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq \frac{2}{1+xy}$ với $x,y\in(0;1)$. Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)}\leq \sqrt{2\left(\frac{2}{1+xy}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

Lại có $3xy-(x^2+y^2)=xy-(x-y)^2\leq xy$. Suy ra $P\leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}+xy$.
Xét $f(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t}}+t$ với $t\in\left(0;\frac{1}{9}\right]$. Ta tìm được $P_{\max}=f(\frac{1}{9})=\frac{6\sqrt{10}}{10}+\frac{1}{9}$.

5 Đề 5

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;3)$, chân đường cao kẻ từ đỉnh A là điểm $K(-1;1)$. Tìm tọa độ A,B,C.

Hướng dẫn

Ta có thể viết được phương trình BC (qua K vuông góc với KH) là $y-1=0$. Đến đây bạn đọc có thể tham khảo hướng dẫn giải ở **Đề 3** để tìm ra lời giải.
Ta tìm được $\{A(-1;7),B(1;1),(-7;1)\}$ hoặc $\{A(-1;7),B(-7;1),(1;1)\}$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-3)-y\sqrt{y+3}=-2\\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y(y+8)}\end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x\geq 2;\ y\geq 0$
Quan sát (1) ta cũng sẽ định hướng được sẽ sử dụng phương pháp hàm số, với hàm đặc trưng sẽ là một hàm bậc 3.

$$(1)\iff (x-1)^3-3(x-1)=(y+3)\sqrt{y+3}-3\sqrt{y+3}.\quad (*)$$

Dễ thấy hàm $f(t)=t^3-3t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên

$$(*)\iff f(x-1)=f(\sqrt{y+3})\iff x-1=\sqrt{y+3}$$

Khi đó,

$$(2)\iff 9(x-2)=y^2+8y\iff 9(\sqrt{y+3}-1)=y^2+8y\quad (**)$$

Nhẩm (hoặc sử dụng Casio) tìm được nghiệm $y=1$ nên bằng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ biến đổi được như sau

$$(**) \iff (y-1)\left(\frac{9}{\sqrt{x}y+3+2}-y-9\right)=0 \iff y=1.$$

(Vì với $y\geq 0$ thì $\frac{9}{\sqrt{x}y+3+2}-y-9<0$). Vậy hệ có nghiệm $(3;1)$.

Bài 3

Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=9$, $xyz\leq 0$. CMR $2(x+y+z)-xyz\leq 10$.

Hướng dẫn

Không giảm tính tổng quát, giả sử $x\leq y\leq z$, do $xyz\leq 0$ nên $x\leq 0$. Lại có $x^2+y^2+z^2=9$ nên $x^2\leq 9$, suy ra $x\in[-3;0]$.

Mặt khác $yz\leq\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\leq\frac{y^2+z^2}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned}
& 2(x+y+z)-xyz \\
= \ & 2x+2(y+z)-xyz \\
\leq \ & 2x+2\sqrt{2(y^2+z^2)}-x\cdot\frac{y^2+z^2}{2} \\
= \ & \frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x+2\sqrt{2(9-x^2)}=f(x).
\end{aligned}$$

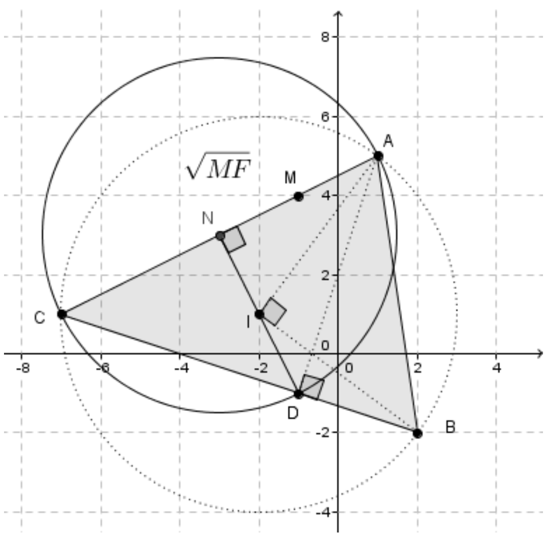
Xét $f(x)$ trên $[-1;0]$ ta sẽ chỉ ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x=-1, y=z=2$.

6 Đề 6

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2;1)$ và thỏa mãn điều kiện $\widehat{AIB}=90^o$, chân đường cao kẻ từ A đến BC là $D(-1;-1)$, đường thẳng AC đi qua $M(-1;4)$. Tìm tọa độ A,B biết A có hoành độ dương.

Hướng dẫn



Chìa khóa của bài toán là có lẽ là phát hiện ra mối liên hệ giữa 3 giả thiết bài toán đã cho: $DI\perp AC$ ($M\in AC$). Việc định hướng được tính chất này cũng khá tự nhiên, nhưng cần kiến thức hình lớp 9 vững, đây cũng là xu hướng ra đề thường gặp.

Ta có $\widehat{AIB}=90^o$ nên $\widehat{ACB}=45^o$ (Góc nội tiếp bằng $\frac{1}{2}$ góc ở tâm cùng chắn cung). Do đó ΔACD vuông cân tại D, suy ra $DA=DC$, mà $IA=IC$ nên DI là đường trung trực của AC.

Từ đó, $ID\perp AC$ và N là trung điểm AC với N là hình chiếu vuông góc của I lên AC.

Ta tìm được AC: $x-2y+9=0$ (qua M vuông góc với DI) và $N(-3;3)$. Ta cũng viết được phương trình đường tròn (C): $(x+3)^2+(y-3)^2=20$ tâm N bán kính ND. Suy ra $A(1;5)=(C)\cap AC$ (chú ý, hoành độ A dương) và cũng sẽ tìm được $B(2;-2)$.

Bài 2

Giải BPT $3(x^2-2)+\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1})$.

Hướng dẫn

Đk: $x\ge 1$, ta biến đổi phương trình trở thành

$$3(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x})^2+(\sqrt{x^2-x}-1)^2+2\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\right)>0. \quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{4\sqrt{2}}{t}+t^2-6$ với $t=\sqrt{x^2-x+1}\ge 1$.

Ta có $f'(t)=2t-\dfrac{4\sqrt{2}}{t^2}=\dfrac{2(t^3-2\sqrt{2})}{t^2}$, $\quad f'(t)=0 \iff t=\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên và ta sẽ chỉ ra được $f(t)\ge 0$ với mọi $t\ge 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}\iff x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta có $(*)\iff \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x^2-x}-1\ne 0\\ \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\ne 0\end{array}\right. \iff x\ne\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=[1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 3

Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $2(x+y)+7z=xyz$. Tìm GTNN $S=2x+y+2z$.

Hướng dẫn

Ta có $2(x+y)=z(xy-7)$. Do x,y,z là các số dương nên $xy-7>0$, suy ra $z=\dfrac{2(x+y)}{xy-7}$.

Suy ra $S=f(x,y)=2x+y+\dfrac{4(x+y)}{xy-7}$ với điều kiện $x>0,\ y>0,\ xy>7$.

Với mỗi x cố định, xét đạo hàm của $f(x,y)$ theo ẩn y ta được:

$$f'_y(x,y)=1+\frac{4(xy-7)-4x(x+y)}{(xy-7)^2}=1-\frac{28+4x^2}{(xy-7)^2}.$$

Khi đó, $f'_y(x,y)=0\iff x^2y^2-14xy+21-4x^2=0\iff y_o=\dfrac{7}{x}+2\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}$.

Suy ra

$$f(x,y)\ge f(x,y_o)=2x+\frac{11}{x}+4\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}=g(x).$$

Xét $g(x)$ với $x\in(0;+\infty)$ ta sẽ tìm được $S\ge f(x;y_o)=g(x)\ge 15$.

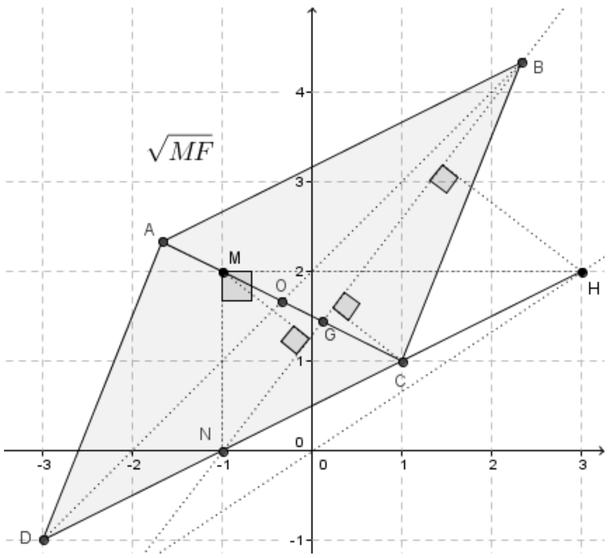
Vậy $S_{\min}=15$ khi $x=3,\ y=5,\ z=2$.

7 Đề 7

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm CD và BN có phương trình $13x-10y+13=0$; điểm $M(-1;2)$ thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC=4AM$. Gọi H là điểm đối xứng của N qua C. Tìm tọa độ A,B,C,D biết $3AC=2AB$ và $H\in\Delta: 2x-3y=0$.

Hướng dẫn



Gọi $G=BN\cap AC$ thì G là trọng tâm tam giác BCD, suy ra $GC=\frac{1}{3}AC$. Mà $AC=4AM$ nên $MG=\frac{5}{12}AC$, suy ra $CG=\frac{4}{5}MG$. Từ đó

$$d(C,BN)=\frac{4}{5}d(M,BN).$$

Lại có $HN=2CN$ nên

$$d(H,BN)=2d(C,BN)=\frac{8}{5}d(M,BN).$$

Mà $d(M,BN)=\frac{20}{\sqrt{269}}$ và $H(3t,2t)$ (do $H\in\Delta$). Nên ta sẽ tìm được $t=1$, $t=-\frac{45}{19}$.

Để ý rằng M,H nằm khác phía so với BN nên ta chỉ ra được $H(3;2)$.

Mặt khác với giả thiết $3AC=2AB=2CD=2NH$ ta chỉ ra được $MC=\frac{1}{2}NH$ tức là tam giác MNH vuông tại M và tìm được $N(-1;0)$.

Từ đó ta sẽ tìm được $C(1;1)$, $D(-3;-1)$, $A\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+(y^2-y-1)\sqrt{x^2+2}-y^3+y+2=0 \\ \sqrt[3]{y^2-3}-\sqrt{xy^2-2x-2}+x=0 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $xy^2-2x-2\geq 0$.

Trong phương trình (1), đặt $\sqrt{x^2+2}=t\geq 2$ ta được

$$t^2+(y^2-y-1)t-y^3+y=0.\quad (*)$$

Do $\Delta_t=(y^2+y-1)^2$ (hoặc sử dụng Casio) nên

$$(*)\iff \left[\begin{array}{l} t=y \\ t=1-y^2\leq 1\ (loại) \end{array}\right. \iff \begin{cases} y\geq 2 \\ y^2=x^2+2 \end{cases}.$$

Thế vào (2) ta được

$$\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt{x^3-2}+x=0\qquad (\text{Đk: } x\geq\sqrt[3]{2}).$$

Bằng phương pháp nhân với lượng liên hợp ta sẽ chỉ ra được phương trình trên có đúng 1 nghiệm $x=3$.

Bài 3

Cho $a \in [1;2]$. CMR $(2^a+3^a+4^a)(6^a+8^a+12^a) < 24^{a+1}$.

Hướng dẫn

Bất đẳng thức tương đương với

$$(2^a+3^a+4^a)\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right) < 24.$$

Do $a \in [1;2]$ nên $2 \le 2^a \le 4;\ 3 \le 3^a \le 9;\ 4 \le 4^a \le 16 \implies 2 \le 2^a < 16;\ 2 < 3^a < 16;\ 2 < 4^a \le 16$.

Lại có, $x \in [2;16]$ thì $(x-2)(x-16) \le 0 \iff x^2 - 18x + 32 \le 0 \iff x - 18 + \dfrac{32}{x} \le 0 \iff \dfrac{32}{x} \le 18 - x$.

Từ đó suy ra

$$32\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right) < 54 - (2^a+3^a+4^a) \iff \frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a} < \frac{54-(2^a+3^a+4^a)}{32}.$$

Khi đó

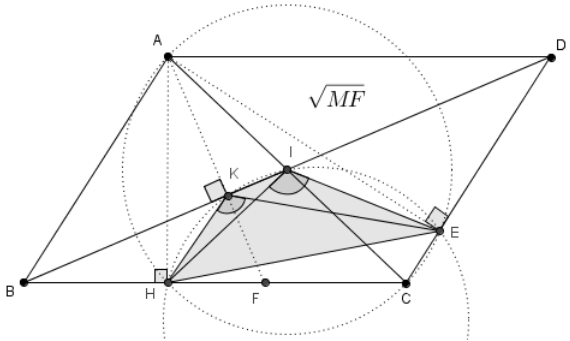
$$\begin{aligned}(2^a+3^a+4^a)\left(\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}\right) &< \frac{(2^a+3^a+4^a)[54-(2^a+3^a+4^a)]}{32}\\ &\le \frac{1}{32}\left[\frac{[2^a+3^a+4^a+54-(2^a+3^a+4^a)]}{2}\right]^2 = \frac{729}{32} < 24.\end{aligned}$$

8 Đề 8

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC}$ nhọn, $A(-2;-1)$. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD, CD. Đường tròn $(C): x^2+y^2+x+4y+3=0$ ngoại tiếp tam giác HKE. Tìm tọa độ B, C, D biết H có hoành độ âm, C có hoành độ dương và nằm trên đường thẳng $x-y-3=0$.

Hướng dẫn



Gọi $I = AC \cap BD$, ta sẽ chứng minh $I \in (C)$ bằng cách chỉ ra $HKIE$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy, $AHCE$ nội tiếp đường tròn tâm I nên $\widehat{HIE} = 2\widehat{HAE}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn 1 cung).
Lại có $ABHK, AKED$ là các tứ giác nội tiếp và $\widehat{EAB} = \widehat{HAD} = 90^o$ nên

$$\widehat{HKE} = 180^o - \widehat{HKB} - \widehat{EKD} = 180^o - \widehat{HAB} - \widehat{EAD} = 90^o - \widehat{HAB} + 90^o - \widehat{EAD} = 2\widehat{HAE}.$$

Từ đó, $\widehat{HKE} = \widehat{HIE}$, tức là $HKIE$ nội tiếp.

Mặt khác, I là trung điểm AC và $C(c;c-3) \in d$ $(c>0)$ nên $I\left(\dfrac{c-2}{2};\dfrac{c-4}{2}\right)$. Do $I \in (C)$ nên ta tìm được $c=2$ và $I(0;-1)$, $C(2;-1)$.

Gọi (C') là đường tròn đường kính AC, (C'): $x^2+(y+1)^2=4$.

$E, H = (C) \cap (C')$ nên ta sẽ tìm được $\left(-\dfrac{8}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$, $E(0;-3)$ (Do H có hoành độ âm).

Từ đó ta cũng tìm được $B(-4;-3)$, $C(2;-1)$, $D(4;1)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3\sqrt{y^3(2x-y)}+\sqrt{x^2(5y^2-4x^2)}=4y^2 & (1) \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{y+1}+2=x+y^2 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x \le 2$; $y \ge -1$; $y^3(2x-y) \ge 0$; $5y^2-4x^2 \ge 0$.
Nhận thấy (1) đồng bậc 3 nên đặt $y = tx$. Ta có $y^3(2x-y) \ge 0 \implies xy \ge 0 \implies t > 0$.
Ta sẽ được phương trình

$$3\sqrt{t^3(2-t)}+\sqrt{5t^2-4}=4t^2.$$

Bằng phương pháp nhân với lượng liên hợp với nhân tử chung là $(t-1)^2$ ta xác định được $(*)$ có đúng một nghiệm $t=1$, tức là $x=y$. (Bằng BĐT AM-GM ta cũng sẽ chỉ ra được $x=y$).
Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}+2=x+x^2.$$

Suy ra $x^2+x-2>0 \implies x>1$. Bằng phương pháp nhân liên hợp ta sẽ phân tích phương trình trở thành

$$(x^2-x-1)\left(1+\frac{1}{x-1+\sqrt{2-x}}+\frac{1}{x+\sqrt{x+1}}\right)=0$$

$$\iff x^2-x-1=0 \implies x=y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 3

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $4(a^3+b^3)+c^3=2(a+b+c)(ac+bc-2)$. Tìm GTLN

$$P=\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}+\frac{b+c}{a+b+c+2}-\frac{(a+b)^2+c^2}{16}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x^3+y^3 \ge \frac{1}{4}(x+y)^3$; $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ với mọi $x,y>0$. Suy ra

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^3 \le (a+b)^3+c^3 \le 4(a^3+b^3)+c^3 \le 2(a+b+c)\left(\frac{(a+b+c)^2}{4}-2\right)$$

Suy ra $a+b+c \ge 4$.
Khi đó áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\frac{2a^2}{3a^2+b^2+2a(c+2)}=\frac{a}{a+c+2+\left(\frac{b^2}{2a}+\frac{a}{2}\right)} \le \frac{a}{a+c+2+2\sqrt{\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{a}{2}}}=\frac{a}{a+b+c+2},$$

và $(a+b)^2+c^2 \ge \frac{1}{2}(a+b+c)^2$. Suy ra

$$P \le \frac{a+b+c}{a+b+c+2}-\frac{(a+b+c)^2}{32}=\frac{t}{t+2}-\frac{t^2}{32}.$$

Với $t=a+b+c\geq 4$, ta có $f'(t)=\dfrac{2}{(t+2)^2}-\dfrac{t}{16}=\dfrac{32-t(t+2)^2}{16(t+2)^2}<0, \forall t\geq 4$.
Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $[4;+\infty)$. Do đó $P\leq f(t)\leq f(4)=\dfrac{1}{6}$.
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=b, a+b=c \\ a+b+c=4 \end{cases} \iff a=b=1, c=2$. Vậy $P_{\max}=\dfrac{1}{6}$.

9 Đề 9

Bài 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2y+1}-2x=4(y-1) & (1) \\ x^2+4y^2+2xy=7 & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đây là một hệ phương trình khá đơn giản.
Với (1), đặt $\sqrt{x+2y+1}=t$, ta sẽ giải được $t=2$. Thế vào (2) ta tìm được nghiệm của hệ là $(1;1)$ và $(1;\dfrac{1}{2})$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng AB: $2x+y-1=0$, phương trình AC :, $3x+4y+6=0$ và điểm $M(1;-3)$ nằm trên BC thỏa mãn $3MB=2MC$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn

Một bài tập khá đơn giản minh họa cho phương pháp tham số hóa.
$A=AB\cap AC$ nên $A(2;-3)$. $B\in AB$ nên $B(b;1-2b)$, $C\in AC$ nên $C(-2-4c;3c)$.
Một điểm lưu ý là M chưa biết nằm trong hay nằm ngoài B,C nên ta cần xét 2 trường hợp
TH1: M nằm ngoài, tức là $3\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MC}$ ta tìm được $b=\dfrac{11}{5}$, $c=-\dfrac{6}{5}$. Từ đó $G\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$.
TH2: $3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ ta cũng xác định được $G\left(1;-\dfrac{8}{3}\right)$.

Bài 3

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm trên $[0;2]$

$$\sqrt{(m+2)x+m}\geq |x-1|.$$

Hướng dẫn

Với $x\in[0;2]$ ta có

$$\sqrt{(m+2)x+m}\geq|x-1| \iff (m+2)x+m\geq(x-1)^2 \iff m\geq\frac{x^2-4x+1}{x+1}=f(x).$$

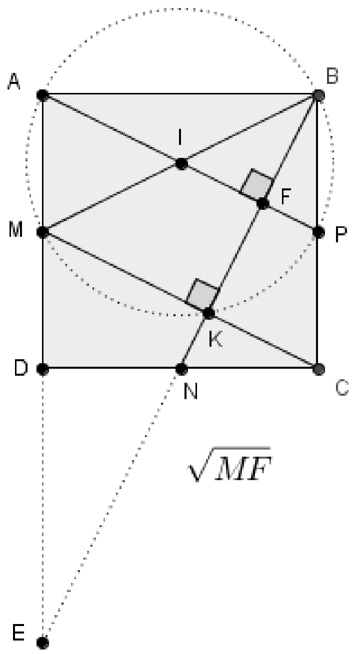
Xét $f(x)$ trên $[0;2]$ ta chỉ ra được $f(x)\in[2\sqrt{6}-6;1]$.
Do đó để BPT có nghiệm trên $[0;2]$ thì $m\geq 2\sqrt{6}-6$.

10 Đề 10

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1;2)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC; $K = BN \cap CM$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK, biết BN có phương trình $2x + y - 8 = 0$ và điểm B có hoành độ lớn hơn 2.

Hướng dẫn



Một lần nữa, chúng ta lại bắt gặp tính chất hình học ở **Đề 2**, tuy nhiên cần phải tận dụng nó một cách khéo léo kết hợp với các giả thiết khác.
Tương tự như ở **Đề 2**, ta chứng minh được $CM \perp BN$ và $AP \perp BN$ với P là trung điểm BC. Và do đó, $I = AP \cap BM$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔBKM có đường kính BM.
Mặt khác, gọi $F = AP \cap BN$ ta có $AF = d(A, BN) = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.
Gọi $E = AD \cap BN$, dễ thấy D là trung điểm AE. Lại có

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{5}{4AB^2}.$$

Nên $AB = 4$. Từ đó ta tính được $IA = \dfrac{AP}{2} = \sqrt{5}$, suy ra $\overrightarrow{AI} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{AF}$.
Ta lại tìm được $F\left(\dfrac{11}{5}; \dfrac{18}{5}\right)$ (Hình chiếu của A lên BN) nên ta cũng tính được $I(1;3)$. Và phương trình cần tìm là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

<u>*Nhận xét:*</u> Cách làm trong đáp án chính thức cần tìm tọa độ điểm B từ giả thiết $AB = 4$ và $B \in BN$ nên cần $x_B > 2$ để loại nghiệm. Nhưng với cách làm này ta thấy giả thiết $x_B > 2$ bị thừa.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2+2y^2} = x + 2y + 3xy & (1) \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x^2+2y^2} = 2y - x & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $y \geq -1$. Với phương trình (1), đặt $\sqrt{x^2+2y^2} = t \geq 0$, coi là phương trình ẩn t, x, y là tham số. Ta tính được $\Delta_t = (2x+3y+1)^2$ nên

$$(1) \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2y^2} = -x - y - 1 \\ \sqrt{x^2+2y^2} = x + 2y \end{array}\right.$$

Thế vào (2) ta được nghiệm $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Bài 3

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2) = 9(xy+2yz+zx)$. Tìm GTLN

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3}.$$

Hướng dẫn

Ta có $5x^2+5(y^2+z^2) = 9x(y+z)+18yz \iff 5x^2-9x(y+z) = 18yz-5(y^2+z^2)$.
Lại có $yz \le \frac{1}{4}(y+z)^2$; $y^2+z^2 \ge \frac{1}{2}(y+z)^2$ nên $18yz-5(y^2+z^2) \le 2(y+z)^2$.
Do đó

$$\begin{aligned} & 5x^2-9x(y+z) \le 2(y+z)^2 \\ \iff & [x-2(y+z)](5x+y+z) \le 0 \\ \iff & x \le 2(y+z). \end{aligned}$$

Và

$$P = \frac{x}{y^2+z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \le \frac{2x}{(y+z)^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \le \frac{4}{y+z} - \frac{1}{27(y+z)^3}.$$

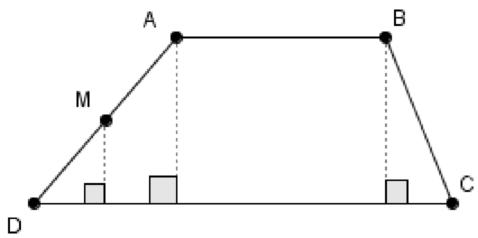
Đặt $y+z = t > 0$ ta có $P \le 4t - \frac{1}{27}t^3 = f(t)$. Xét $f(t)$ ta suy ra được $P \le 16$.
Vậy $P_{\max} = 16$ khi $x = \frac{1}{3}$; $y = z = \frac{1}{12}$.

11 Đề 11

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $CD = 2AB$, điểm $C(-1;-1)$, trung điểm của AD là $M(1;-2)$. Tìm tọa độ B, biết diện tích tam giác BCD bằng 8, $AB = 4$ và D có hoành độ nguyên dương.

Hướng dẫn



Ta có, $d(M, CD) = \frac{1}{2}d(A, CD) = \frac{1}{2}d(B, CD)$.
Nên $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.d(B, CD).BC = 2d(M, CD).AB$. Từ đó tìm được $d(M, CD) = 1$.
Khi đó ta sẽ viết được phương trình đường thẳng CD (là đường thẳng qua C cách M một khoảng không đổi).

Cụ thể, gọi VTPT của CD là $\overrightarrow{n} = (a, b) \neq \overrightarrow{0}$, phương trình của CD là $a(x+1)+b(y+1) = 0$, suy ra

$$d(M, CD) = \frac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1 \iff 3a^2-4ab = 0 \iff \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 3a = 4b \end{array}\right..$$

Với $a = 0$, chọn $b = 1$, ta được CD: $y+1 = 0$. Với giả thiết $CD = 8$ và x_D nguyên dương ta sẽ tìm được $D(7;-1)$. Mà $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $B(-9;-3)$.
Với $3a = 4b$, chọn $a = 4$, $b = 3$, ta được CD: $4x+3y+7 = 0$, tương tự như trên ta thấy trường hợp này không có điểm D nào thỏa mãn điều kiện x_D nguyên dương.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2+9.3^{x^2-2y}=(2+9^{x^2-2y}).5^{2y-x^2+2} & (1) \\ 4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4} & (2) \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $y-x+2\geq 0$. Với (1) đặt $t=x^2-2y$ ta biến đổi thành

$$\frac{2+3^{t+2}}{5^{t+2}}=\frac{2+3^{2t}}{5^{2t}} \iff f(t+2)=f(2t).$$

Với $f(u)=\dfrac{2+3^u}{5^u}=2.\left(\dfrac{1}{5}\right)^u+\left(\dfrac{3}{5}\right)^u$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta được $t=2 \iff 2y=x^2-2$.
Thế vào (2) ta được

$$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2x+2} \iff 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1} \iff 4^s=s+\sqrt{s^2+1}. \quad (3)$$

Do $(s+\sqrt{s^2+1})(\sqrt{s^2+1}-1)=1$ nên $4^{-s}=\sqrt{s^2-1}-s. \quad (4).$
Trừ vế (3), (4) ta được $4^s-4^{-s}-2s=0. \quad (*)$
Xét $g(v)=4^v-4^{-v}-2v$, $g'(v)=\ln 4(4^v+4^{-v})-2\geq 2\ln 4-2>0$. Suy ra $g(v)$ là hàm đồng biến, và do đó $(*)$ có đúng 1 nghiệm $s=0$. Và nghiệm hệ là $\left(1;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 3

Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm GTNN

$$P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z^2+2}{z+xy}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x+yz=yz-z-y-1=(z-1)(y+1)=(x+y)(y+1)$. Tương tự cũng có $y+zx=(x+y)(x+1)$ và $z+xy=(x+1)(y+1)$. Nên

$$P=\frac{x}{(x+y)(y+1)}+\frac{y}{(x+y)(x+1)}+\frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)}=\frac{x^2+y^2+x+y}{(x+y)(x+1)(y+1)}+\frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)}.$$

Lại có, $x^2+y^2\geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2$; $(x+1)(y+1)\leq \dfrac{1}{4}(x+y+2)^2$. Nên

$$P\geq \frac{2(x+y)^2+4(x+y)}{(x+y+2)^2(x+y)}+\frac{4(z^2+2)}{(x+y+2)^2}=\frac{2(x+y)+4}{(x+y+2)^2}+\frac{4(z^2+2)}{(x+y+2)^2}=\frac{2}{z+1}+\frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2}=f(z).$$

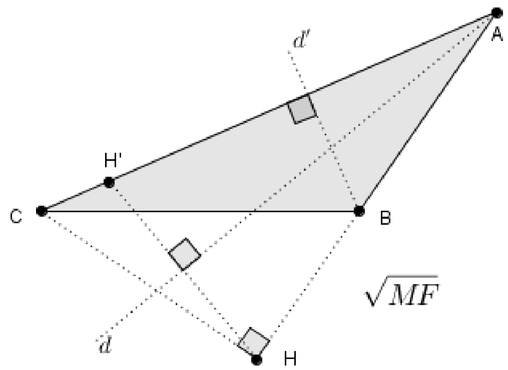
Xét $f(z)$ với $z>1$ ta sẽ suy ra được $f(z)\geq \dfrac{13}{4}$ hay $P_{\min}=\dfrac{13}{4}$ khi $x=y=1$, $z=3$.

12 Đề 12

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC. Đường phân giác trong góc A có phương tình d: $x-y+2=0$, đường cao hạ từ B có phương trình d': $4x+3y-1=0$. Biết hình chiếu của C lên AB là điểm $H(-1;-1)$. Tìm tọa độ B,C.

Hướng dẫn



Một bài tập cơ bản minh họa cho phương pháp dựng hình. Các yếu tố cho trước: d, d', H.
Từ đó, ta sẽ "dựng" được H' (tức là tìm được tọa độ) đối xứng với H qua d. Do d là đường phân giác trong $\widehat{BAC}$ nên $H'\in AC$. Từ đó ta sẽ dựng được đường thẳng AC qua H' vuông góc với d'.
$A=AC\cap d$, ta dựng được đường thẳng AH, $B=AH\cap d'$.
Ta cũng dựng được đường thẳng CH qua H vuông góc AB và $C=CH\cap AC$.

Với phân tích như thế, ta sẽ tìm được $B\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $C\left(-\frac{10}{3};\frac{3}{4}\right)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(x+1)=x^3+y^2+x-y \quad (1)\\ 3y(2+\sqrt{9x^2+3})+(4y+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0 \quad (2)\end{cases}$.

Hướng dẫn

Với (1), phân tích thành nhân tử ta sẽ được $(x-y)(x^2-y+1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} y=x\\ y=x^2+1\end{array}\right.$.

Với $y=x^2+1$ thế vào (2) dễ thấy vô nghiệm.
Với $y=x$ thế vào (2) ta được

$$3x(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)=0$$

$$\iff 3x(2+\sqrt{9x^2+3})=(-2x-1)(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2) \iff f(3x)=f(-2x-1)$$

Với $f(t)=t(\sqrt{t^2+2})$ là một hàm đồng biến nên ta được $3x=-2x-1 \iff x=-\frac{1}{5}$.

Nghiệm hệ là $\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Bài 3

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=2$. Tìm GTLN

$$S=\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}.$$

Hướng dẫn

Ta có
$$\sqrt{\frac{ab}{ab+2c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}}=\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right).$$
Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+c}$. Tương tự ta cũng có
$$\sqrt{\frac{bc}{bc+2a}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right);\quad \sqrt{\frac{ca}{ca+2b}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right).$$
Cộng các vế ta được
$$S\le\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}\right)=\frac{3}{2}.$$
Vậy $S_{\max}=\frac{3}{2}$ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

13 Đề 13

Bài 1

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-x\sqrt{\dfrac{y^2+2}{x}}=2x-2 & (1)\\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt[3]{2x-1}=1 & (2)\end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x>0$. Với (1), chia cả hai vế cho x ta được
$$\frac{y^2+2}{x}-\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}-2=0\iff\sqrt{\frac{y^2+2}{x}}=2\iff y^2=4x+2.$$
Thế vào (2) được $\sqrt{4x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=1$.
Đặt $\sqrt{4x-1}=u\ge0$; $\sqrt[3]{2x-1}=v$. Ta được $\begin{cases}u+v=1\\u^2-2v^3=1\end{cases}\iff\begin{cases}u=1\\v=0\end{cases}$.
Từ đó ta được nghiệm hệ $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Bài 2

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;1)$, $B(-1;-3)$ và hai đường thẳng d_1: $x+y+3=0$, d_2: $x-5y-16=0$. Tìm tọa độ $C\in d_1$ và $D\in d_2$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn

Ta có, $C(c;-c-3)\in d_1$, $D(5d+16;d)\in d_2$ nên $\overrightarrow{CD}=(5d+16-c;d+c+3)$.
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ từ đó ta tìm được $d=-2$, $c=3$ và $C(3;-6)$, $D(6;-2)$.

Bài 3

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tìm GTLN và GTNN $P = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Hướng dẫn

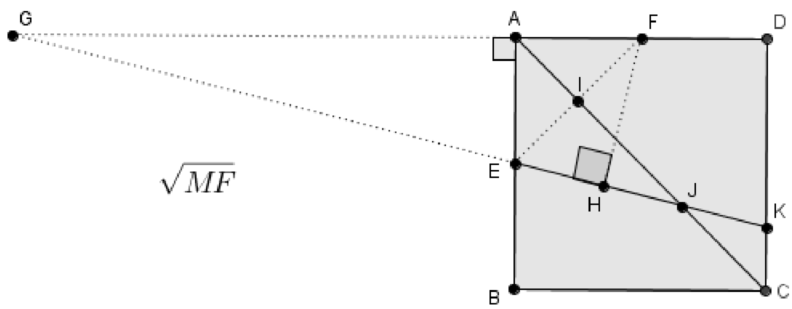
Ta có
$$P = x^3 + y^3 - 3x - 3y = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3(x+y).$$
Lại có $x^2 + y^2 + xy = 3 \iff xy = (x+y)^2 - 3$, nên
$$P = t^3 - 3(t^2-3)t - 3t = -2t^3 + 6t = f(t).$$
Với $t = x + y$. Mà $t^2 - 3 = xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$, nên $t \in [-2; 2]$.
Xét $f(t)$ với $t \in [-2; 2]$ ta tìm được $P_{\max} = 4$, $P_{\min} = -4$.

14 Đề 14

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. $F\left(\dfrac{11}{2}; 3\right)$ là trung điểm AD. EK: $19x - 8y - 18 = 0$ với E là trung điểm AB, K thuộc cạnh CD sap cho $KD = 3KC$. Tìm tọa độ C biết $x_E < 3$.

Hướng dẫn



Kẻ $FH \perp EK$, $FH = d(F, EK) = \dfrac{25}{2\sqrt{17}}$.

Gọi $G = AD \cap EK$, hình vuông có độ dài cạnh là a. Ta tính được $GE = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$, $GF = \dfrac{5a}{2}$. Hơn nữa, $\dfrac{AE}{FH} = \dfrac{GE}{GF} = \dfrac{\sqrt{17}}{5}$. Nên ta sẽ tính được $a = 5$.

Khi đó $EF = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$, mà $E \in EF$, $x_E < 3$ nên ta tìm được $E\left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

Gọi $I\left(\dfrac{15}{4}; \dfrac{11}{4}\right)$ là trung điểm EF, suy ra AC: $7x + y - 29 = 0$ (qua I vuông góc với EF).

Gọi $P = AC \cap EF$, ta tìm được $P\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{17}{3}\right)$, hơn nữa $\overrightarrow{IC} = \dfrac{9}{5}\overrightarrow{IP}$ nên $C(3; 8)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-2y|+1=\sqrt{x-3y} \\ x(x-4y+1)+y(4y-3)=5 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x \geq 3y$. Đặt $|x-2y|=u \geq 0$; $|\sqrt{x-3y}|=v \geq 0$. ta được hệ

$$\begin{cases} u-v=-1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}.$$

Từ đó giải hệ ta được nghiệm $(-5;-3)$; $(-11;-5)$.

Bài 3

Cho $a,b,c>0$. CMR

$$\frac{a^2+1}{4b^2}+\frac{b^2+1}{4c^2}+\frac{c^2+1}{4a^2} \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

Hướng dẫn

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{1}{4b^2}\right)+\left(\frac{b^2}{4c^2}+\frac{1}{4c^2}\right)+\left(\frac{c^2}{4a^2}+\frac{1}{4a^2}\right) \\ &= \frac{a}{2b^2}+\frac{b}{2c^2}+\frac{c}{2a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Mà

$$\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b}; \quad \frac{b}{c^2}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}; \quad \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a}.$$

Nên

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\right] \geq \frac{1}{4}\left(\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}\right)=VP.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

15 Đề 15

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D; diện tích hình thang bằng 6; $CD=2AB$, $B(0;4)$. Biết $I(3;-1)$, $K(2;2)$ lần lượt nằm trên đường thẳng AD và DC. Viết phương trình đường thẳng AD biết AD không song song với trục tọa độ.

Hướng dẫn

Vì AD không song song với các trục tọa độ nên gọi VTPT của AD là $\overrightarrow{n}=(1,a)$ $(a\neq 0)$.
Suy ra AD: $x+ay+a-3=0$ và DC: $ax-y-2a+2=0$.
Từ đó ta tính được $d(B,DC)=\dfrac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}$, $d(B,AD)=\dfrac{|5a-3|}{\sqrt{a^2+1}}$.
Mà $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AD.(AB+CD)=6$ nên ta sẽ tìm được $a=1$, $a=-\dfrac{5}{3}$, $a=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{2}}{7}$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x(x^2-3x+3)}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{y+3}+1 & (1)\\ 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=\sqrt[3]{y+2}+1 & (2)\end{cases}$.

Hướng dẫn

Đk: $x\in[1;3-\sqrt{3}]\cup[3+\sqrt{3};+\infty)$; $y\in[-3;+\infty)$.

$$(1)\iff x-1+\sqrt{(x-1)^3+1}=\sqrt[3]{y+2}+\sqrt{(\sqrt[3]{y+2})^3+1}\iff f(x-1)=f(\sqrt[3]{y+2}).$$

Với $f(t)=t+\sqrt{t^3+1}$, $t\geq -1$ là hàm đồng biến nên ta có $x-1=\sqrt[3]{y+2}$. Thế vào (2) ta được

$$3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=(x-1)+1\iff (x-1)+1+\sqrt{(x-1)^2-4(x-1)+1}=3\sqrt{x-1}.$$

Do $x=1$ không thỏa mãn nên chia cả hai vế cho $\sqrt{x-1}>0$ ta được

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1-4+\frac{1}{x-1}}=3\iff t+\sqrt{t^2-6}=3\iff t=\frac{5}{2}.$$

Với $t=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-1}>2$. Từ đó ta tìm được nghiệm hệ $(5;62)$, $\left(\dfrac{5}{4};-\dfrac{127}{64}\right)$.

Bài 3

Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x-y+1\leq 0$. Tìm GTLN

$$T=\frac{x+3y^2}{\sqrt{x^2+y^4}}-\frac{2x+y^2}{5x+5y^2}.$$

Hướng dẫn

Ta có $x\leq y-1\implies 0<\dfrac{x}{y^2}\leq\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq\dfrac{1}{4}$. Đặt $t=\dfrac{x}{y^2}\implies t\in(0;\dfrac{1}{4}]$.
Suy ra

$$T=\frac{\frac{x}{y^2}+3}{\sqrt{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2+1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2\frac{x}{y^2}+1}{\frac{x}{y^2}+1}=\frac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2t+1}{t+1}=f(t).$$

$$f'(t)=\frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}.$$

Do $t \in (0; \frac{1}{4}]$ nên $1-3t \geq \frac{1}{4}$; $\sqrt{(t^2+1)^3} \leq \sqrt{\left(\frac{17}{16}\right)^3} \implies \frac{1-3t}{\sqrt{(t^2+1)^3}} \geq \frac{4}{17\sqrt{\frac{17}{16}}}$.

Và $-\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} > -\frac{1}{5}$. Suy ra $f'(t) > 0$.

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $(0; \frac{1}{4}] \implies f(t) \leq f(\frac{1}{4}) = \frac{13}{\sqrt{17}} - \frac{6}{25}$.

16 Lời giải đề 16

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x-y+1-\sqrt{2}=0$ và điểm $A(-1;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) qua A, gốc tọa độ O và tiếp xúc đường thẳng d.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của OA thì $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{OA} = (-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của trung trực đoạn OA, do đó trung trực đoạn OA có phương trình $x-y+1=0$

Tâm I của đường tròn (C) nằm trên trung trực đoạn OA nên suy ra $I(t, t+1)$.

Theo đề ta có $IA = d(I,d) \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)^2+t^2} = \frac{\left|t-t-1+1\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2t^2+2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Khi $t=0$ thì $I(0;1)$ và bán kính R của (C) là 1. Phương trình đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=1$

Khi $t=-1$ thì $I(-1;0)$ và bán kính R của (C) là 1. Phương trình đường tròn $(C): (x+1)^2+y^2=1$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} x^3+y^3+3(y-1)(x-y)=2 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{8} \end{array}\right.$

Lời giải

Điều kiện: $x, y \geq -1$

Phương trình đầu tương đương

$$\begin{aligned} & (x+y)^3-8+6-3xy(x+y)+3(y-1)(x-y)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y-2)(x^2+y^2+2xy+2x+2y+4)-3(x+y-2)(xy+y+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y-2)(x^2-xy+y^2+2x-y+1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ x^2-xy+y^2+2x-y+1=0 \quad (*) \end{array}\right. \end{aligned}$$

Phương trình $(*) \Leftrightarrow x^2+(2-y)x+y^2-y+1=0$

Phương trình này có $\Delta=-3y^2\le 0$.

Nếu $y\neq 0$ thì $\Delta<0$ dẫn đến hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $y=0$ thì $x=-1$, cũng không thỏa hệ phương trình.

Với $x+y-2=0$, thay $y=2-x$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x+1}+2\sqrt{3-x}=x^2-2x+1\\
\Leftrightarrow\ &(2\sqrt{x+1}-x-1)+(2\sqrt{3-x}+x-3)=x^2-2x-3\\
\Leftrightarrow\ &(x^2-2x-3)\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+1}+x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3-x}+3-x}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &x^2-2x-3=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=3\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $x=-1$ thì $y=3$

Với $x=3$ thì $y=-1$

So điều kiện hệ đã cho có nghiệm $(-1;3)$, $(-3;1)$

Bài 3

Giả sử x và y không đồng thời bằng 0. Chứng minh

$$-2\sqrt{2}-2\le\frac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}\le 2\sqrt{2}-2$$

Lời giải

Nếu $y=0$, khi đó $x\neq 0$. Ta có $\dfrac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}=0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $y\neq 0$ khi đó $\quad -2\sqrt{2}-2\le\dfrac{x^2-(x-4y)^2}{x^2+4y^2}\le 2\sqrt{2}-2$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2}-2\le\frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^2-\left(\frac{x}{2y}-2\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2+1}\le 2\sqrt{2}-2 \quad (1)$$

Đặt $\dfrac{x}{2y}=\tan t$, khi đó

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow -2\sqrt{2}-2 \le \frac{\tan^2 t-(\tan t-2)^2}{\tan^2 t+1} \le 2\sqrt{2}-2 \\
&\Leftrightarrow -2\sqrt{2}-2 \le \cos^2 t(4\tan t-4) \le 2\sqrt{2}-2 \\
&\Leftrightarrow -2\sqrt{2}-2 \le 2\sin 2t-4\cos^2 t \le 2\sqrt{2}-2 \\
&\Leftrightarrow -\sqrt{2}-1 \le \sin 2t-2\cos^2 t \le \sqrt{2}-1 \\
&\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sin 2t-\cos 2t \le \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \le 1 \\
&\Leftrightarrow -1 \le \sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, vậy ta có điều phải chứng minh.

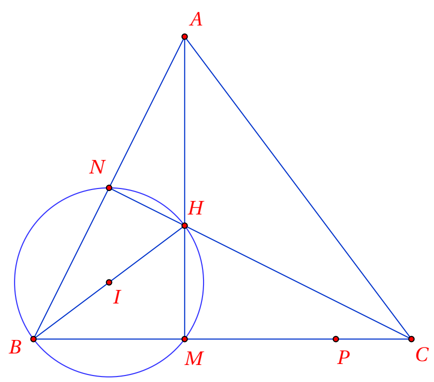
17 Lời giải đề 17

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có đỉnh $A(-1;4)$, trực tâm H. Đường thẳng AH cắt cạnh BC tại M, đường thẳng CH cắt AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là $I(2;0)$, đường thẳng BC đi qua điểm $P(1;-2)$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $x+2y-2=0$.

Lời giải

Dễ thấy $BMHN$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra I là trung điểm BH.



$B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$.

Suy ra $H(2+2t;-t)$.

Từ đó $\overrightarrow{AH}=(3+2t;-t-4), \overrightarrow{BP}=(2t-1;-t-2)$.

Do H là trực tâm $\triangle ABC$ nên

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP}=0 &\Leftrightarrow (2t+3)(2t-1)+(t+4)(t+2)=0 \\
&\Leftrightarrow 5t^2+10t+5=0 \\
&\Leftrightarrow t=-1
\end{aligned}
$$

Từ đó $H(0;1), B(4;-1), \overrightarrow{AH}=(1;-3)$. Đường thẳng $BC: x-3y-7=0$

Đường thẳng $AC: 2x-y+6=0$. Từ đó tọa độ $C(-5;-4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{y(2x-y)}}=\dfrac{2}{y+\sqrt{x(2x-y)}} \\ 2(y-4)\sqrt{2x-y-3}-(x-6)\sqrt{x+y+1}=3(y-2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ 2y - x \geq 0 \\ 2x - y - 3 \geq 0 \end{cases}$

Nếu $y = 0$ thi phương trình đầu trở thành $\frac{2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{2x^2}} \Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{\sqrt{2}}{x}$. Dẫn đến hệ vô nghiệm.

Tương tự $x = 0$ cũng không là nghiệm của hệ.

Xét $x, y > 0$. Đặt $t = \frac{x}{y}$, thế thì $t > 0$. Phương trình đầu trở thành

$$\frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{1}{t+\sqrt{2t-1}} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}} \Leftrightarrow \frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{2}{2t-1+2\sqrt{2t-1}+1} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{2}{(\sqrt{2t-1}+1)^2} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}} (1)$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{t} \\ b = \sqrt{2t-1} \end{cases}$ $(a, b > 0)$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}$

Ta sẽ chứng minh bổ đề sau: $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \ \forall a, b > 0$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có

$(1+ab)(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{ab}.\sqrt{b})^2 = a(1+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{a+b}.\frac{1}{1+ab}$

Tương tự $\frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{a+b}.\frac{1}{1+ab}$

Cộng 2 BĐT vế theo vế ta được $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a+b}{a+b}.\frac{1}{1+ab} = \frac{1}{1+ab}$

Bổ đề được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$. Tức $\sqrt{t} = \sqrt{2t-1} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y$

Thay $y = x$ vào phương trình thứ hai ta được $2(x-4)\sqrt{x-3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2)$ (2)

Bài 3

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a > 2, b > 0, c > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2+c^2-4a+5}} - \frac{1}{(a-1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải

Đặt $a_1 = a - 2$, thế thì $a_1 > 0$. Khi đó $P = \frac{1}{2\sqrt{a_1^2+b^2+c^2+1}} - \frac{1}{(a_1+1)(b+1)(c+1)}$

Ta có $a_1^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a_1+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a_1+b+c+1)^2$

Ta lại có $(a_1+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a_1+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{a_1+b+c+3}{3}\right)^3$

Do đó $P \le \dfrac{1}{a_1+b+c+1} - \dfrac{27}{(a_1+b+c+3)^3}$.

Đặt $t = a_1+b+c$, khi đó $t > 1$. Khi đó $P \le \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{27}{(t+2)^3}$ trên miền $(1;+\infty)$

$f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{81}{(t+2)^4}$. Khi đó $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81t^2 \Leftrightarrow t = 4$ (do $t > 1$)

Lập bảng biến thiên:

t	1		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{8}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta có $f(t) \le f(4) = \dfrac{1}{8}\ \forall t > 1$. Vậy $P \le \dfrac{1}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = 3, b = c = 1$. Vậy $\max P = \dfrac{1}{8}$

18 Lời giải đề 18

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy. Viết phương trình các cạnh của hình vuông $ABCD$, biết rằng các đường thẳng AB, CD, BC, AD lần lượt đi qua các điểm $M(2;4), N(2;-4), P(2;2), Q(3;-7)$.

Lời giải

Gọi $\vec{n} = (a,b)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB. Vì AB đi qua điểm $M(2;4)$ nên phương trình tổng quát của AB là $ax+by-2a-4b = 0$.

Đường thẳng BC đi qua $P(2;2)$ và vuông góc với AB nên có phương trình $-bx+ay-2a+2b = 0$

$ABCD$ là hình vuông nên $d(N, AB) = d(Q, BC)$.

Hay $\dfrac{|2a-4b-2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|-3b-7a-2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9a = -9b \\ 9a = 7b \end{array}\right.$

Với $9a = -9b$, chọn $a = 1 \Rightarrow b = -1$

Phương trình $AB: x-y+2 = 0$, phương trình $BC: x+y-4 = 0$

Đường thẳng CD đi qua $N(2;-4)$ và song song với AB nên có phương trình $x-y-6 = 0$

Đường thẳng AD đi qua $Q(3;-7)$ và song song với BC nên có phương trình $x+y+4 = 0$

Với $9a = 7b$, chọn $a = 7, b = 9$.

Phương trình $AB: 7x+9y-50=0$, phương trình $BC: -9x+7y+4=0$.

Phương trình $CD: 7x+9y+22=0$, phương trình $AD: -9x+7y+76=0$

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2-y^2-7x+2y+6=0 \\ -7x^3+12x^2y-6xy^2+y^3-2x+2y=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Ta có $-7x^3+12x^2y-6xy^2+y^3-2x+2y=0 \Leftrightarrow (x-y)\left[x^2-x(y-2x)+(y-2x)^2+2\right]=0\ (*)$

Vì $x^2-x(y-2x)+(y-2x)^2+2=\left[y-2x-\dfrac{x}{2}\right]^2+\dfrac{3x^2}{4}+2>0\ \forall x,y$ nên $(*)\Leftrightarrow x=y$

Thay $y=x$ vào phương trình sau ta được $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x,y)=(2;2)$, $(x,y)=(3;3)$

Bài 3

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2-3b\le 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}$$

Lời giải

Ta có $a^2+b^2+c^2-2a-4b-2c+6=(a-1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\ge 0$, theo giả thiết thì $a^2+b^2+c^2\le 3b$.
Suy ra $3b-2a-4b-2c+6\le 0 \Leftrightarrow 2a+b+2c\le 6 \Leftrightarrow 2a+b+2c+10\le 16$

Với hai số $x,y>0$ thì $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\ge \dfrac{8}{(x+y)^2}$. Áp dụng nhận xét trên ta có

$$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4}{(b+2)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge \frac{8}{\left(a+\frac{b}{2}+2\right)^2}+\frac{8}{(c+3)^2}\ge \frac{8.8}{\left(a+\frac{b}{2}+c+5\right)^2}=\frac{16^2}{(2a+b+2c+10)^2}\ge 1$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=c=1, b=2$. Vậy $\min P=1$.

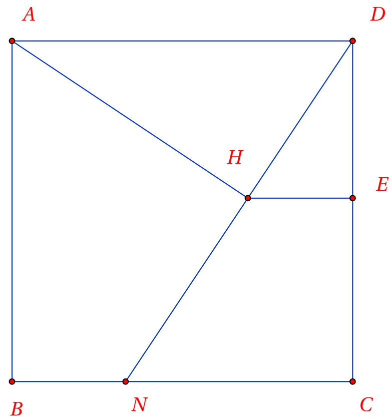
19 Lời giải đề 19

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Điểm $N(1;-2)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$ và điểm $M(3;6)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AD. Gọi H là chân hình chiếu vuông góc của A xuống đường thẳng DN. Xác định tọa độ của các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết khoảng cách từ điểm H đến cạnh CD bằng $\dfrac{12\sqrt{2}}{13}$ và đỉnh A có hoành độ là một số nguyên lớn hơn -2.

Lời giải

Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên $CD \Rightarrow HE = \dfrac{12\sqrt{2}}{13}$



Giả sử cạnh hình vuông là a $(a>0)$

Ta có $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ nên N nằm giữa B, C và thỏa mãn $NC = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2a}{3}$.

Suy ra $DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$

Ta có $\triangle ADH \backsim \triangle DNC$ (g.g) nên $\dfrac{AD}{DN} = \dfrac{DH}{NC} \Rightarrow DH = \dfrac{2a}{\sqrt{13}}$

$\triangle DHE \backsim DNC$ (g.g) nên $\dfrac{HE}{NC} = \dfrac{DH}{DN} \Rightarrow NC = \dfrac{13}{6}.HE = 2\sqrt{2}$

Dẫn đến $\dfrac{2a}{3} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$

Giả sử vtpt của AD là $\vec{n} = (a;b)$ với $a^2 + b^2 > 0$. Phương trình $AD: ax + by - 3a - 6b = 0$.

$d(N, AD) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{|-2a - 8b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 7a^2 - 16ab - 23b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(7a - 23b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ 7a = 23b \end{array}\right.$

Trường hợp $a = -b$. Chọn $a = 1, b = -1$. Phương trình $AD: x - y + 3 = 0$.

Kẻ $NP \perp AD$ $(P \in AD)$, khi đó $NP: x + y + 1 = 0 \Rightarrow P(-2;1)$

$AP = BN = \dfrac{BC}{3} = \sqrt{2}$. Lại do $A \in AD \Rightarrow A(t; t+3)$ $(t > -2)$. Từ $AP = \sqrt{2}$ suy ra $t = -1(n) \vee t = -3(\ell)$

Với $t = -1$ thì $A(-1;2)$. Khi đó do $\overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{AP}$ nên $D(-4;-1)$. Từ đó tìm được $B(2;-1), C(-1;-4)$

Trường hợp $7a = 23b$. Giải tương tự ta được 2 giá trị hoành độ A không phải số nguyên. Vậy ta loại trường hợp này.

Kết luận $A(-1;2), B(2;-1), C(-1;-4), D(-4;-1)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - y - 1}.\sqrt[3]{x - y - 1} = y + 1 \\ x + y + 1 + \sqrt{2x + y} = \sqrt{5x^2 + 3y^2 + 3x + 7y} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - y - 1 \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \\ 5x^2 + 3y^2 + 3x + 7y \geq 0 \end{cases}$

Nếu $x^2 = x + y + 1$, từ phương trình đầu suy ra $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Thử vào phương trình sau thấy $(x,y)=(1;-1)$ thỏa mãn. Suy ra $(1;-1)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x^2 > x+y+1$. Phương trình đầu tương đương

$$\sqrt[3]{x-y-1}=\frac{y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y-1}-1=\frac{y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}}-1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-y-2}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}=\frac{-(x+y+1)(x-y-2)}{\sqrt{x^2-x-y-1}.(y+1+\sqrt{x^2-x-y-1})}$$
$$\Leftrightarrow (x-y-2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}+\frac{x+y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}(\sqrt{x^2-x-y-1}+y+1)}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-2=0 \quad (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-y-1)^2}+\sqrt[3]{x-y-1}+1}+\dfrac{x+y+1}{\sqrt{x^2-x-y-1}(\sqrt{x^2-x-y-1}+y+1)}=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Từ điều kiện $\begin{cases} 2x+y\ge 0 \\ x^2-x-y-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x^2+x-1\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Nếu $x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, khi đó từ $2x+y\ge 0 \Rightarrow y\ge -2x\ge 1+\sqrt{5}\Rightarrow x+y+1>0$, do đó $(*)$ vô nghiệm.

Trường hợp $x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x>0$. Giả sử $y+1\le 0\Rightarrow x-(y+1)>0\Rightarrow VT(1)>0\ge VP(1)$, dẫn đến hệ vô nghiệm. Suy ra $y+1>0$, từ đây thì pt $(*)$ vô nghiệm.

Suy ra $y=x-2$. Thay vào phương trình sau ta được

$$2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{8x^2-2x-2}\Leftrightarrow 2x-1+\sqrt{3x-2}=\sqrt{2(2x-1)^2+2(3x-2)}$$

Điều kiện: $x\ge\dfrac{2}{3}$

Đặt $\begin{cases} a=2x-1 \ (a>\dfrac{1}{3}) \\ b=\sqrt{3x-2} \ (b\ge 0) \end{cases}$

Phương trình trở thành $a+b=\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=2a^2+2b^2\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$

Từ đó $2x-1=\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow 4x^2-4x+1=3x-2\Leftrightarrow 4x^2-7x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Với $x=1\Rightarrow y=-1$, thử lại thấy thỏa mãn. Ta nhận nghiệm $(x;y)=(1;-1)$

Với $x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow y=-\dfrac{5}{4}$. Thử lại không thỏa.

Bài 3

Cho ba số thực không âm x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)}} - \frac{5}{(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)}}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$\begin{aligned}(x+y)\sqrt{(x+2z)(y+2z)} \le (x+y).\frac{x+y+4z}{2} &= \frac{x^2+y^2+2xy+4xz+4yz}{2}\\ &\le \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2+y^2}{2} + (x^2+z^2) + (y^2+z^2)\\ &\le 2(x^2+y^2+z^2)\end{aligned}$$

$$(y+z)\sqrt{(y+2x)(z+2x)} \le (y+z).\frac{y+z+4x}{2} = \frac{y^2+z^2+2yz+4yx+4zx}{2} \le 2(x^2+y^2+z^2)$$

Khi đó biểu thức P trở thành

$$P \le \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{4}{2(x^2+y^2+z^2)} - \frac{5}{2(x^2+y^2+z^2)} = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+4}} - \frac{9}{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+y^2+z^2+4}$, khi đó $t > 2$. Khi đó $P \le \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{4}{t} - \frac{9}{2(t^2-4)}$ trên miền $(2; +\infty)$

$$f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{9t}{(t^2-4)^2} = \frac{(4-t)(4t^3+7t^2-4t-16)}{t^2(t^2-4)^2}$$

Do $t > 2$ nên $4t^3+7t^2-4t-16 \ge 4(t^3-4) + t(7t-4) > 0$, vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Lập bảng biến thiên ta thu được $f(t) \le f(4) = \frac{5}{8}$. Vậy $P \le \frac{5}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$. Vậy $\max P = \frac{5}{8}$

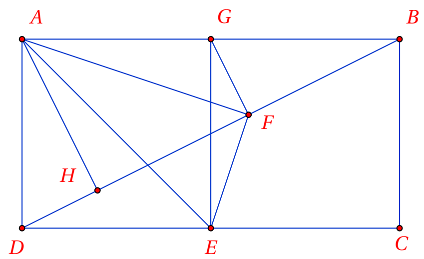
20 Lời giải đề 20

Bài 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BD. E, F lần lượt là trung điểm cạnh CD và BH. Biết $A(1;1)$, phương trình đường thẳng EF là $3x - y - 10 = 0$ và điểm E có tung độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D.

Lời giải

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CD, BH, AB. Ta chứng minh $AF \perp EF$.



Ta thấy các tứ giác $ADEG$ và $ADFG$ nội tiếp đường tròn đường kính DG nên tứ giác $ADEF$ cũng nội tiếp đường tròn này, do đó $AF \perp EF$.

Đường thẳng AF có phương trình $x+3y-4=0$

Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow F\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow AF=\sqrt{\dfrac{32}{5}}$

$\triangle AFE \backsim \triangle DCB \Rightarrow EF=\dfrac{AF}{2}=2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$

$E \in EF: 3x-y-10=0 \Rightarrow E(t;3t-10) \Rightarrow \overrightarrow{EF}=\left(t-\dfrac{17}{5};3t-\dfrac{51}{5}\right)$.

$EF^2=\left(t-\dfrac{17}{5}\right)^2+\left(3t-\dfrac{51}{5}\right)^2=\dfrac{8}{5} \Leftrightarrow 5t^2-34t+57=0 \Leftrightarrow t=3 \vee t=\dfrac{19}{5}$

$t=3 \Rightarrow E(3;-1)$. Với $t=\dfrac{19}{5}$ thì $E\left(\dfrac{19}{5};\dfrac{7}{5}\right)$. Vì E có tung độ âm nên $E(3;-1)$.

Phương trình $AE: x+y-2=0$. Vì $\triangle ADE$ vuông cân tại D nên

$\begin{cases} AD=DE \\ AD\perp DE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \\ (x-1)(x-3)=(y-1)(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ (x-1)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Với $x=1; y=-1$ thì $D(1;-1)$. Với $x=3; y=1$ thì $D(3;1)$.

Do D và F nằm về hai phía so với AE nên $D(1;-1)$

Khi đó $C(5;-1), B(1;5)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+y+6}=1-y \\ 9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y+6\geq 0 \\ x\geq -1 \end{cases}$

Nếu $y\geq 0$, để hệ có nghiệm thì $1\geq y\geq 0$.

Khi đó $2\sqrt{x+y+6}\geq 2\sqrt{-1+0+6}=2\sqrt{5}$ mà $1-y\leq 1$. Dẫn đến phương trình đầu vô nghiệm.

Vậy $y<0$, để phương trình sau có nghiệm thì $x>0$. Ta có

$9\sqrt{1+x}+xy\sqrt{9+y^2}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2}=(-y)\sqrt{9+(-y)^2}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t\sqrt{9+t^2}$ với $t>0$

$f'(t)=\dfrac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}}>0\ \forall t>0$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên miền $(0;+\infty)$

Do đó $(1)\Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{x}}=-y\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{y^2}$. Thế vào phương trình sau ta được $2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}=1-y\ (*)$

Hàm số $g(y)=2\sqrt{\dfrac{9}{y^2}+y+6}$ đồng biến trên $(-\infty;0)$, hàm số $h(y)=1-y$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$ nên phương trình $(*)$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Nhận thấy $y=-3$ là nghiệm của $(*)$, vậy $y=-3$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1;-3)$.

Bài 3

Cho các số thực dương $ab\geq 1$ và $c(a+b+c)\geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b+2c}{1+a}+\frac{a+2c}{1+b}+6\ln(a+b+2c)$$

Lời giải

$P+2=\dfrac{a+b+2c+1}{1+a}+\dfrac{a+b+2c+1}{1+b}+6\ln(a+b+2c)=(a+b+2c+1)\left(\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\right)+6\ln(a+b+2c)$

Ta chứng minh bổ đề quen thuộc sau $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\geq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$ với $ab\geq 1$

Thật vậy $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}\geq\dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}\Leftrightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{ab}-1)\geq 0$ (luôn đúng do $ab\geq 1$)

Lại theo BĐT Cauchy: $\sqrt{ab}\leq\dfrac{ab+1}{2}$ nên

$$\frac{2}{1+\sqrt{ab}}\geq\frac{4}{3+ab}\geq\frac{4}{c^2+ab+bc+ca}=\frac{4}{(a+c)(b+c)}\geq\frac{16}{(a+b+2c)^2}$$

Từ đó $P+2\geq\dfrac{16(a+b+2c+1)}{(a+b+2c)^2}+6\ln(a+b+2c)$

Đặt $t=a+b+2c$, thế thì $t>0$. Khi đó $P+2\geq\dfrac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{16(t+1)}{t^2}+6\ln t$ với $t>0$.

$f'(t)=\dfrac{16t^2-32t(t+1)}{t^4}+\dfrac{6}{t}=\dfrac{-16t-32}{t^3}+\dfrac{6}{t}=\dfrac{6t^2-16t-32}{t^3}$. Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$ (do $t>0$)

Lập bảng biến thiên ta được $f(t)\geq f(4)=5+6\ln 4$

Vậy $P\geq 3+6\ln 4$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

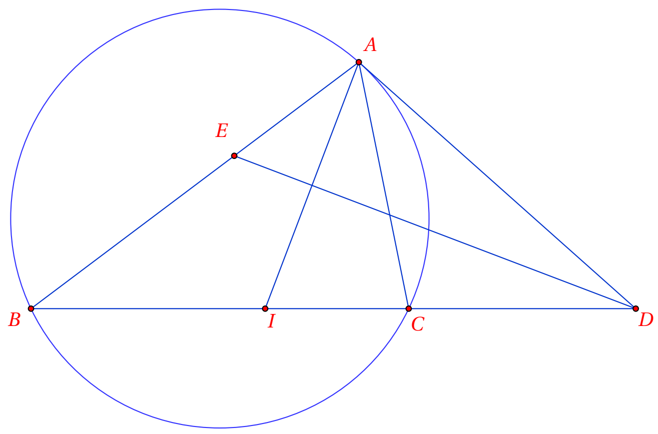
Kết luận: $\max P=3+6\ln 4$.

21 Lời giải đề 21

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D, đường phân giác trong của $\angle ADB$ có phương trình $x-y+2=0$. Điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình đường thẳng AB.

Lời giải



Gọi AI là phân giác trong $\angle BAC$.

Ta có $\begin{cases} \angle AID = \angle ABD + \angle BAI \\ \angle IAD = \angle CAD + \angle IAC \end{cases}$

Mà $\angle BAI = \angle IAC$ và $\angle ABC = \angle CAD$

Nên $\angle AID = \angle IAD$. Tức $\triangle AID$ cân tại D.

Gọi E là giao điểm của phân giác trong $\angle ADB$ với AB. Khi đó $DE \perp AI$.

Suy ra đường thẳng $AI : x+y-5=0$

Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI. Vì $M \in AC$ nên $M' \in AB$. Dễ dàng tìm được tọa độ M' là $(4;9)$.

Đường thẳng AB đi qua A và nhận $\overrightarrow{AM}$ làm vtcp nên có phương trình $5x-3y+7=0$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3\sqrt{xy+x-y^2-y} = 5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} xy+x-y^2-y \geq 0 \\ 4y^2-x-2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương $x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u=\sqrt{x-y}$ và $v=\sqrt{y+1}$ $(u, v \geq 0)$, thế thì $u^2-4v^2+3uv=0 \Leftrightarrow u=v \vee u=-4v$ (ℓ).

Với $u=v$ thì $x=2y+1$. Thay vào phương trình sau ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y &\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\sqrt{y-1}-1=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow y-2=0 \text{ (Vì biểu thức còn lại luôn dương } \forall y \geq 1) \end{aligned}$$

$y = 2 \Rightarrow x = 5$. So điều kiện, hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (5;2)$

Bài 3

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy: $\dfrac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \dfrac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \dfrac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \le \dfrac{bc}{2}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{a+c}\right)$

Tương tự $\dfrac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \le \dfrac{ca}{2}\left(\dfrac{1}{b+a} + \dfrac{1}{b+c}\right)$ và $\dfrac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \le \dfrac{ab}{2}\left(\dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{c+b}\right)$

Cộng các BĐT vừa đánh giá vế theo vế ta được

$$P \le \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ca+ab}{2(b+c)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \dfrac{3}{2}$

22 Lời giải đề 22

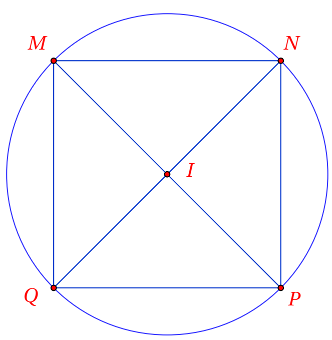
Bài 1

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông $MNPQ$ nội tiếp đường tròn (C) biết tọa độ $M(2;0)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Tìm tọa độ các điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$ với F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái, bên phải của (E).

Lời giải

1. (C) có tâm $I(2;-3)$, bán kính $R = 3$.



Vì hình vuông $MNPQ$ nội tiếp (C) nên I cũng là tâm của $MNPQ$.

M, P đối xứng nhau qua I nên $P(2;-6)$.

Đường thẳng NQ đi qua I và nhận $\overrightarrow{MP} = (0;-6)$ làm vtpt nên có phương trình $y + 3 = 0$

Tọa độ N, Q là nghiệm của hệ $\begin{cases} y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0 \end{cases}$

Suy ra $N(-1;-3), Q(5;-3)$ hoặc $N(5;-3), Q(-1;-3)$.

Với $N(-1;-3), Q(5;-3)$. Đường thẳng $MN: x+y-2=0$, đường thẳng $NP: x+y+4=0$, đường thẳng $PQ: x-y-8=0$ và đường thẳng $QM: x-y-2=0$

2. Ta có $a=4; b=3, c=\sqrt{7}$.

Theo định nghĩa elip và giả thiết ta có hệ $\begin{cases} MF_1 - MF_2 = 8 \\ MF_1 = 2MF_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MF_1 = \dfrac{16}{3} \\ MF_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

Theo công thức bán kính qua tiêu ta có $MF_2 = a - \dfrac{cx_M}{a} \Leftrightarrow \dfrac{8}{3} = 4 - \dfrac{\sqrt{7}x_M}{4} \Leftrightarrow x_M = \dfrac{16\sqrt{7}}{21}$

Thay x_M vào phương trình (E) ta được $y_M = \pm\dfrac{\sqrt{329}}{7}$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2.4^y + 1 = 2^{\sqrt{2x}+1} + 2\log_2 \dfrac{\sqrt{x}}{y} \\ x^3 + x = (y+1)(xy+1) + x^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Phương trình thứ hai tương đương

$$\begin{aligned} x^3 + x - x^2 = xy^2 + xy + y + 1 &\Leftrightarrow (x-y-1) + x(x^2 - y^2 + x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y-1) + x[(x-y)(x+y) + x - y] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y-1)(x^2 + xy + 1) = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $x > 0, y > 0$ nên $x^2 + xy + 1 > 0$. Do đó $(*) \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = y + 1$ (1)

Mặt khác, phương trình đầu tương đương với

$$\begin{aligned} &4^y + \frac{1}{2} = 2^{\sqrt{2x}} + \log_2 \sqrt{x} - \log_2 y \\ &\quad \Leftrightarrow 4^y + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 y = 2^{\sqrt{2x}} + \log_2 \sqrt{x} \\ &\quad \Leftrightarrow 2^{2y} + \log_2(\sqrt{2}.y) = 2^{2.\sqrt{\frac{x}{2}}} + \log_2\left(\sqrt{2}.\sqrt{\frac{x}{2}}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 2^{2t} + \log_2(\sqrt{2}.t)$ với $t > 0$

$f'(t) = 2.2^{2t}.\ln 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.t.\ln 2} > 0$ với mọi $t > 0$.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow y = \sqrt{\dfrac{x}{2}} \Leftrightarrow 2y^2 = x$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2y^2 = y + 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -\dfrac{1}{2}\ (\ell) \end{array}\right.$

Với $y = 1$ thì $x = 2$. Thử lại thấy đúng, vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (2; 1)$

Bài 3

Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+1}{4b^2} + \frac{b^2+1}{4c^2} + \frac{c^2+1}{4a^2} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Lời giải

Ta có $VT = \left(\dfrac{a^2}{4b^2} + \dfrac{1}{4a^2}\right) + \left(\dfrac{b^2}{4c^2} + \dfrac{1}{4b^2}\right) + \left(\dfrac{c^2}{4a^2} + \dfrac{1}{4c^2}\right) \geq \dfrac{1}{2b} + \dfrac{1}{2c} + \dfrac{1}{2a}$

Áp dụng BĐT $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ với mọi $x, y > 0$ ta có

$\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a}\right) \geq \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a}$

23 Lời giải đề 23

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(0;2)$ và hai đường thẳng $d: x+2y=0$ và $\Delta: 4x+3y=0$. Viết phương trình của đường tròn đi qua điểm M, có tâm thuộc đường thẳng d và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng $4\sqrt{3}$. Biết tâm đường tròn có tung độ dương.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn cần tìm. $I \in d$ nên $I(-2t; t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2t; 2-t)$

Kẻ $IH \perp AB$ $(H \in AB)$, khi đó $IH = d(I, \Delta) = \dfrac{|-8t+3t|}{5} = |t|$

Ta có $IM^2 = IA^2 = IH^2 + AH^2 \Rightarrow 4t^2 + (2-t)^2 = t^2 + 12 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$

Với $t = -1$ thì $y_I < 0$ (loại)

Với $t = 2$ thì $I(-4; 2)$. Bán kính đường tròn $R = IM = 4$.

Suy ra phương trình đường tròn $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 16$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+12y^2+x+2=8y^3+8y \\ \sqrt{x^2+8y^3}=5x-2y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $x^3+8y^3>0$

Phương trình đầu tương đương $x^3+x+1=(2y-1)^3+(2y-1)+1$ $(*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+1$ trên $\mathbb{R}$. Do $f'(t)=3t^2+1>0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*)\Leftrightarrow x=2y-1$.

Thay $2y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta được

$$\sqrt{x^2+(x+1)^3}=4x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1\ge 0 \\ x^3-12x^2+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=11 \end{array}\right.$$

Với $x=1$ thì $y=1$, với $x=11$ thì $y=6$.

So điều kiện ta được nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(11;6)$.

Giúp hiểu sâu hơn lời giải.

Thực ra có nhiều học sinh sẽ khó khăn khi biến đổi pt (1) về thành (*). Tuy nhiên, vấn đề này hết sức đơn giản và phép biến đổi đó không phải là duy nhất. Ta có thể tạo ra nhiều đẳng thức tương tự.

Chẳng hạn ta muốn biến đổi (1) thành $f(x+a)=f(2y+b)$, chỉ việc cho giá trị a ngẫu nhiên sau đó đồng nhất thức ta được b.

Cụ thể, $(1)\Leftrightarrow x^3+x+2=8y^3-12y^2+8y$.

Chọn ngẫu nhiên $a=-1$, khi đó $VT=(x-1)^3+3(x-1)^2+4(x-1)+4$

Như vậy vế phải sẽ có dạng $(2y+b)^3+3(2y+b)^2+4(2y+b)+4$

Đồng nhất (từ số hạng tự do) với $8y^3-12y^2+8y$, tức là giải phương trình $b^3+3b^2+4b+4=0$ cho ta $b=-2$

Kết quả là $(1)\Leftrightarrow (x-1)^3+3(x-1)^2+4(x-1)+4=(2y-2)^3+3(2y-2)^2+4(2y-2)+4$

Và khảo sát hàm đặc trưng cuối cùng vẫn cho ta: $x=2y-1$.

Các em có thể thực hành vấn đề này ở đề 26, câu 2.

Bài 3

Cho a,b,c là độ dài các cạnh của một tam giác thỏa mãn $2c+b=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{3}{b+c-a}+\frac{4}{c+a-b}+\frac{5}{a+b-c}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $a,b,c>0$ và $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=a$

Sử dụng đánh giá $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ với mọi $x,y\geq 0$ ta có

$$\begin{aligned}
S&=\left(\frac{2}{b+c-a}+\frac{2}{a+b-c}\right)+\left(\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}\right)+\left(\frac{3}{c+a-b}+\frac{3}{a+b-c}\right)\\
&\geq\frac{2.4}{2b}+\frac{4}{2c}+\frac{3.4}{2a}\\
&=\frac{4}{b}+\frac{2}{c}+\frac{6}{a}\\
&=2a+\frac{6}{a}\\
&\geq 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

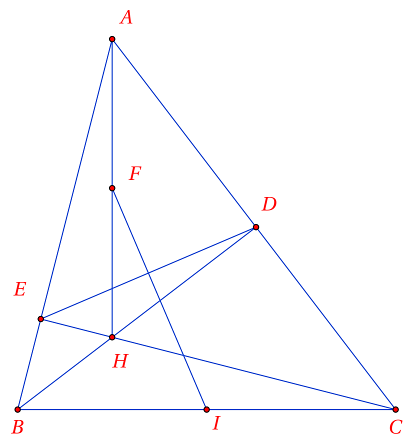
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$. Vậy $\min S=4\sqrt{3}$

24 Lời giải đề 24

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D,E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC biết phương trình DE là $x-2=0$ và điểm D có hoành độ dương.

Lời giải



Dễ thấy tứ giác $BEDC$ nội tiếp đường tròn tâm I.

Và tứ giác $AEHD$ nội tiếp đường tròn tâm F.

Vậy IF là đường trung trực của ED. Do đó $IF\perp ED$.

Suy ra phương trình $IF: y-1=0$. Suy ra $F(1;1)$, suy ra $A(-1;2)$.

$D\in DE\Rightarrow D(2;d)$. Do $FD=FA\Rightarrow 1+(x-1)^2=5\Rightarrow\left[\begin{array}{l}d=3\\ d=-1\end{array}\right.$

Do $y_D>0$ nên $D(2;3)$.

Phương trình $AC: x-3y+7=0$.

Đường thẳng BC đi qua I và vuông góc AH nên có phương trình $BC: 2x-y-11=0$

Từ đó $C(8;5)\Rightarrow B(4;-3)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y^2-3y+1+\sqrt{y-1}=x^2+\sqrt{x}+xy \\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{-3x+2y+4}+3x^2-14x-8=0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2x+y \geq 0 \\ -3x+2y+4 \geq 0 \end{cases}$

Nhận thấy $x=0, y=1$ không phải là nghiệm của hệ.

Xét $y>1, x>0$ Phương trình đầu tương đương:

$$\sqrt{y-1}-\sqrt{x}+(y-1)^2-x^2+y^2-xy-y=0 \Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+(y-1-x)(y-1+x)+y(y-1-x)=0$$
$$\Leftrightarrow (y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x\right)=0 \quad (*)$$

Do $x>0, y>1$ nên $\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}}+2y-1+x>0$. Vậy $y=x+1$.

Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+(x-5)(3x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{6-x}}+(3x+1)\right)=0$$

Vì $x>0$ nên suy ra $x=5$, từ đó $y=6$. Thử lại thấy đúng, vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y)=(5;6)$

Bài 3

Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{a^2+1}+\frac{2b}{b^2+1}+\frac{c^2-1}{c^2+1} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có $\dfrac{2a}{a^2+1}+\dfrac{2b}{b^2+1}=\dfrac{2a}{a^2+ab+bc+ca}+\dfrac{2b}{b^2+ab+bc+ca}=\dfrac{2a}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{2b}{(b+c)(b+a)}$

$$=\frac{2ab+2ac+2ab+2bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{4ab+2bc+2ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$=\frac{2+2ab}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} \leq \frac{2+2ab}{(1+ab).\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+c^2}}$$

Vậy $VT \leq \dfrac{2}{\sqrt{1+c^2}}-\dfrac{2}{c^2+1}+1$

Đặt $t=\sqrt{1+c^2}$ $(t\geq 1)$, khi đó $VT\leq \frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}+1$. Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}$ với $t\geq 1$.

$f'(t)=-\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t^3}$. Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow t=2$

Lập bảng biến thiên ta được $f(t)\leq f(2)=\frac{1}{4}$

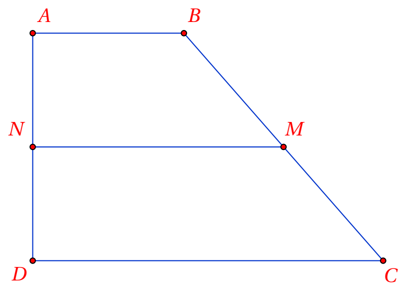
Từ đó $VT\leq \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} c=\sqrt{3} \\ a=b=2-\sqrt{3} \end{cases}$

25 Lời giải đề 25

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình thang $ABCD$ có đường cao AD. Biết $BC=2AB$. $M(0;4)$ là trung điểm BC và phương trình đường thẳng AD là $x-2y-1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết rằng hình thang có diện tích bằng $\frac{54}{5}$ và A,B có tọa độ dương.

Lời giải



Gọi N là hình chiếu của M lên AD. Dễ dàng tìm được $N\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$

$MN=\frac{9}{\sqrt{5}}$. Ta có $S_{ABCD}=MN.AD=\frac{54}{5}$

$\Rightarrow AD=\frac{6}{\sqrt{5}}\Rightarrow AN=\frac{AD}{2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$A\in AD\Rightarrow A(2t+1;t)$. Ta có $AN=\frac{3}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \left(2t+1-\frac{9}{5}\right)^2+\left(t-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{9}{5}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{-1}{5} \end{array}\right.$

Do tọa độ của A dương nên $t=1$, khi đó $A(3;1), D\left(\frac{9}{5};-\frac{1}{5}\right)$

AB vuông góc với AD nên phương trình tham số của $AB:\begin{cases} x=3+b \\ y=1-2b \end{cases}$

$B\in AB\Rightarrow B(3+b,1-2b)$.

Ta có $BM=BA\Rightarrow (3+b)^2+(3+2b)^2=b^2+(b-1)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=-\frac{17}{3} \end{array}\right.$

Với $b=-\frac{17}{3}$ thì $x_B<0$ (loại)

Với $b=-1$ thì $B(2;3)$. Suy ra $C(-2;5)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3y+1}+\sqrt{5x+4}=3xy-y+3 \\ \sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}=2(x+y) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} 3y+1 \geq 0 \\ 5x+4 \geq 0 \end{cases}$

Đặt $a=\sqrt{2x^2+2y^2}, b=\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}}$, khi đó $a \geq 0, b \geq 0$. Phương trình sau trở thành

$$a+b=\sqrt{2(3b^2-a^2)} \Leftrightarrow (a-b)(3a+5b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 3a+5b=0 \end{array}\right.$$

Với $3a+5b=0 \Rightarrow a=b=0$. Từ đó $x=0, y=0$ là nghiệm của hệ đã cho.

Với $a=b \Rightarrow x=y$, thay vào phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}=3x^2-x+3 &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-(x+1)+\sqrt{5x+4}-(x+2)+3(-x^2+x)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{3x+1}+x+1}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{5x+4}+2}+3(-x^2+x)=0 \\ &\Leftrightarrow (-x^2+x)\left(\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{5x+4}+2}+3\right)=0 \\ &\Leftrightarrow -x^2+x=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \vee x=1 \end{aligned}$$

Với $x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm (0;0), (1;1).

Cách 2. Từ phương trình sau để hệ có nghiệm thì $x+y \geq 0$.

Ta có $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq x+y$ và $\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+x^2)}{3}} \geq x+y$

Do đó $\sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{\dfrac{4(x^2+xy+y^2)}{3}} \geq 2(x+y)$

Đẳng thức xảy ra $x=y$.

Bài 3

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2}}$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz: $\sqrt{(1+2)(a^2+2b^2)} \geq a+2b \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{a+2b} \leq \frac{\sqrt{3}}{9}.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)$

Chứng minh tương tự ta suy ra $A \leq \frac{\sqrt{3}}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}+\frac{1}{c}+\frac{2}{a}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}.\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}\right) = \sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $\max A = \sqrt{3}$

26 Lời giải đề 26

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$. Biết $M(1;1), N(4;4)$ lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, AC. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Lời giải

Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $MN \parallel BC \Rightarrow MN \perp AH$.

Suy ra phương trình $AH: x+y-3=0$. Tọa độ $A(t;3-t)$

M là trung điểm $AB \Rightarrow B(2-t;t-1)$

N là trung điểm $AC \Rightarrow C(8-t;t+5)$

Suy ra $\overrightarrow{BH}=(t+1;1-t)$ và $\overrightarrow{AC}=(8-2t;2t+2)$

Do $BH \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow -2t^2-3t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{5}{2} \end{array}\right.$

Với $t=-1 \Rightarrow A(-1;4); B(3;-2), C(9;4)$

Với $t=\frac{5}{2} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), C\left(\frac{11}{2};\frac{15}{2}\right)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2+32x=9x^2+8y+36 \\ 4\sqrt{x+2}+\sqrt{16-3y}=x^2+8 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq \frac{16}{3} \end{cases}$

Từ phương trình đầu ta có $x^3-9x^2+32x-36=(y+2)^3-9(y+2)^2+32(y+2)-36 \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=t^3-9t^2+32t-36$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2-18t+32=3(t-3)^2+5>0\ \forall t\in\mathbb{R}$. Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ đó $(*)\Leftrightarrow x=y+2$

Thay $y=x-2$ vào phương trình sau ta được

$$4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2}-\left(\frac{4x}{3}+\frac{16}{3}\right)+\sqrt{22-3x}-\left(\frac{14}{3}-\frac{x}{3}\right)+(-x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}.\frac{144(x+2)-(4x+16)^2}{4\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3}.\frac{9(22-3x)-(14-x)^2}{\sqrt{22-3x}+(14-x)}+(-x^2+x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow(-x^2+x+2)\left[\frac{1}{3}.\frac{16}{4\sqrt{x+2}+(4x+16)}+\frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{22-3x}+(14-x)}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$$

Với $x=-1\Rightarrow y=-3$. Với $x=2\Rightarrow y=0$.

So điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(-1;-3)$, $(x;y)=(2;0)$

Giúp hiểu sâu hơn lời giải.

Tương tự cách làm câu 2 đề 23, ta cần biến đổi (1) thành $f(x+a)=f(y+b)$

Chọn ngẫu nhiên $a=1$, $VT=(x+1)^3-12(x+1)^2+53(x+1)-78$

Phân tích $VP=(y+b)^3-12(y+b)^2+53(y+b)-78$.

Giải phương trình $b^3-12b^2+53b-78=0$ ta nhận được $b=3$

Vậy $(1)\Leftrightarrow(x+1)^3-12(x+1)^2+53(x+1)-78=(y+3)^3-12(y+3)^2+53(y+3)-78$

Vẫn dẫn đến $x=y+2$

Bài 3

Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^2}{c(c^2+a^2)}+\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}+\frac{c^2}{b(b^2+c^2)}+2(a^2+b^2+c^2)$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy ta có $\dfrac{a^2}{c(c^2+a^2)}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{c}{c^2+a^2}\geq\dfrac{1}{c}-\dfrac{c}{2ac}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2a}$

Từ đó $P\geq\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2b}+2(a^2+b^2+c^2)$

$$=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}+2a^2+2b^2+2c^2$$

$$=\frac{1}{4a}+\frac{1}{4a}+2a^2+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4b}+2b^2+\frac{1}{4c}+\frac{1}{4c}+2c^2$$

$$\geq\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

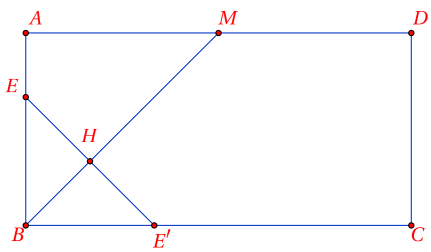
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. Vậy $\min P=\frac{9}{2}$.

27 Lời giải đề 27

Bài 1

Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có đường phân giác trong góc $\angle ABC$ đi qua trung điểm M của cạnh AD, đường thẳng BM có phương trình $x-y+2=0$, điểm D nằm trên đường thẳng Δ có phương trình $x+y-9=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ biết đỉnh B có hoành độ âm và đường thẳng AB đi qua $E(-1;2)$.

Lời giải



Dễ thấy ABM vuông cân tại B nên $AB=AM=\frac{AD}{2}$

Gọi E' là điểm đối xứng của E qua BM. Khi đó $E'\in BC$ vì $\triangle BEE'$ vuông cân tại B.

$EE'\perp BM$ nên có phương trình $x+y-1=0$.

Từ đó dễ dàng tìm được $E'(0;1)$

$B\in BM\Rightarrow B(t;t+2)$. Khi đó $\overrightarrow{EB}=(t+1;t), \overrightarrow{E'B}=(t;t+1)$

$EB\perp E'B\Leftrightarrow \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{E'B}=0\Leftrightarrow t(t+1)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=-1$

Nếu $t=0$ thì $x_B=0$ (loại)

Nếu $t=-1$ thì $B(-1;1)$.

Phương trình cạnh $AB: x+1=0\Rightarrow A(-1;a)$ $(a\neq 1)$.

$D\in\Delta\Rightarrow D(d;9-d)$

M là trung điểm AD nên $M\left(\frac{d+1}{2};\frac{9+a-d}{2}\right)$.

$M\in BM: x-y+2=0$ nên $\frac{d+1}{2}-\frac{9+a-d}{2}+2=0\Leftrightarrow -a+2d-6=0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{AD}=(d+1;9-d-a), \overrightarrow{AB}=(0;1-a)$.

$AB\perp AD\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\Rightarrow (9-d-a)(1-a)=0\Leftrightarrow -a-d+9=0$ (2) (do $1-a\neq 0$)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=4\\ d=5\end{cases}$. Vậy $A(-1;4), D(5;4)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C(5;1)$

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2x-2(x^2-x)\sqrt{3-2y}=(2y-3)x^2-1 \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}}=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 3-2y\geq 0 \\ 2-\sqrt{3-2y}\geq 0 \\ 2x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\leq y\leq \dfrac{3}{2} \\ x\neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Phương trình đầu tương đương với

$x^2-2x+1-2(x-1).x\sqrt{3-2y}+x^2(3-2y)=0 \Leftrightarrow \left[(x-1)-x\sqrt{3-2y}\right]^2=0 \Leftrightarrow x-1=x\sqrt{3-2y}$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Xét $x\neq 0$, khi đó ta có $\dfrac{x-1}{x}=\sqrt{3-2y}$

Thay $\sqrt{3-2y}=1-\dfrac{1}{x}$ vào phương trình thứ hai ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3}+x+2}{2x+1} &\Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=x+2+\sqrt[3]{2x^2+x^3} \\ &\Leftrightarrow \left(2+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3+\sqrt{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{2}{x}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+1>0$ với mọi t.

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $(*) \Leftrightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}}$ $(**)$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$ $(a\neq 0)$, khi đó

$$\begin{aligned} (**) \Leftrightarrow \sqrt{1+a}=\sqrt[3]{1+2a} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a\geq 0 \\ (1+a)^3=(1+2a)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ a^2-a-1=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a\geq -1 \\ a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Nên $x=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \sqrt{3-2y}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ (vô nghiệm). Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Bài 3

Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x,y\geq 1$ và $3(x+y)=4xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^3+y^3-3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

Lời giải

Ta có $P=(x+y)^3-3xy(x+y)-3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{6}{xy}$

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{3}$, do đó $P=(x+y)^3-3xy(x+y)+\frac{6}{xy}-\frac{16}{3}$

Mặt khác $3(x+y)=4xy\le(x+y)^2\Rightarrow x+y\ge 3$.

Và do $x,y\ge 1$ nên $(x-1)(x-1)\ge 0\Rightarrow xy-(x+y)+1\ge 0\Rightarrow\frac{3(x+y)}{4}-(x+y)+1\ge 0\Rightarrow x+y\le 4$

$t=x+y$, thế thì $3\le t\le 4$, và $P=t^3-\frac{9t^2}{4}+\frac{8}{t}-\frac{16}{3}$

Xét hàm số $f(t)=t^3-\frac{9t^2}{4}+\frac{8}{t}-\frac{16}{3}$ với $3\le t\le 4$

Ta có $f'(t)=3t^2-\frac{9t}{2}-\frac{8}{t^2}>0$ với mọi $t\in[3;4]$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[3;4]$.

Suy ra $\min P=f(3)=\frac{49}{12}$ đạt được khi $t=3$ hay $x=y=\frac{3}{2}$

Và $\max P=f(4)=\frac{74}{3}$ đạt được khi $t=4$ hay $x=1,y=3$.

28 Lời giải đề 28

Bài 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ có hai điểm M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC, biết CM cắt DN tại điểm $I\left(\frac{22}{5};\frac{11}{5}\right)$. Gọi H là trung điểm DI, biết đường thẳng AH cắt CD tại $P\left(\frac{7}{2};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết hoành độ A nhỏ hơn 4.

Lời giải

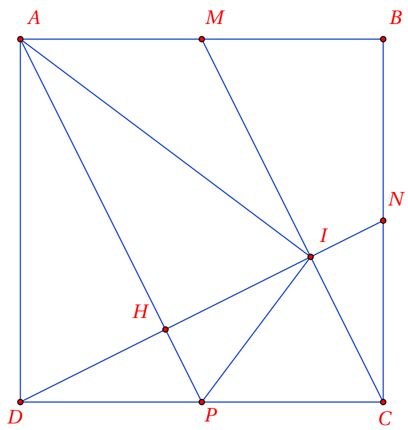
Dễ dàng chứng minh $CM\perp DN$ tại I.

Qua A kẻ đường thẳng vuông góc DN cắt DN tại H' và DC tại P'.

Dễ thấy $AP'\parallel CM$, từ đó suy ra $AMCP'$ là hình bình hành. Suy ra $CP'=AM=\frac{CD}{2}$. Suy ra P' là trung điểm CD.

Mà $H'P'\parallel CI$ nên H' là trung điểm DI. Suy ra $H'\equiv H$.

Vậy $AH\perp DI$ và P là trung điểm CD.



Dễ dàng chứng minh $\angle AIP=90^\circ$, do đó phương trình $AI: 3x+4y-22=0$

Suy ra $A\left(t;\frac{22-3t}{4}\right)\Rightarrow\overrightarrow{IA}=\left(t-\frac{22}{5};\frac{66-15t}{20}\right)$

Ta có $AI=AD=2DP=2PI$, do đó $\left(t-\frac{22}{5}\right)^2+\left(\frac{66-15t}{20}\right)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\frac{34}{5}\end{array}\right.$

Do $x_A < 4$ nên $t = 2$ và $A(2;4)$.

Phương trình $AP: 2x + y - 8 = 0$, phương trình $DN: x - 2y = 0$. Suy ra $H\left(\frac{16}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Suy ra $D(2;1), C(5;1), B(5;4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+5y^2)^2 = 2\sqrt{xy}(6-x^2-5y^2)+36 \\ \sqrt{5y^4-x^4} = 6x^2+2xy-6y^2 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} xy \geq 0 \\ 5y^4 - x^4 \geq 0 \end{cases}$.

Xét phương trình đầu, đặt $t = x^2 + 5y^2$ $(t \geq 0)$, khi đó phương trình đầu trở thành

$t^2 - 2\sqrt{xy}.t - 2\sqrt{xy} - 36 = 0$ $(*)$

$\Delta' = (\sqrt{xy} - 6)^2 \geq 0$

Phương trình $(*)$ có nghiệm $x^2 + 5y^2 = 6$, $x^2 + 5y^2 = -2\sqrt{xy} - 6 < 0$ (loại)

Vậy $x^2 + 5y^2 = 6$. Thay vào phương trình sau ta được

$\sqrt{5y^4 - x^4} = (x^2+5y^2)(x^2-y^2) + 2xy \Leftrightarrow \sqrt{5y^4-x^4} + (5y^4 - x^4) = 4x^2y^2 + 2xy$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \geq 0$. Hàm số này đồng biến nên suy ra $\sqrt{5y^4 - x^4} = 2xy \Rightarrow x = y$ (do x, y cùng dấu)

Thay $x = y$ vào $x^2 + 5y^2 = 6 \Rightarrow x = y = \pm 1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1;1)$, $(x, y) = (-1;-1)$

Bình luận.

Ngoài cách xử lí phương trình (1) như trong lời giải ta còn có thể biến đổi

$(1) \Leftrightarrow (x^2+5y^2)^2 + 2\sqrt{xy}(x^2+5y^2) = 6^2 + 2\sqrt{xy}.6$

Đặt $\sqrt{xy} = a > 0$ và xét hàm số $f(t) = t^2 + 2at, (t > 0)$ có $f'(t) = 2t + 2a > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến, điều này cho ta kết quả $x^2 + 5y^2 = 6$.

Bài 3

Cho a, b, c là các số thực không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Lời giải

Giả sử $c \neq 0$. Đặt $x = \dfrac{a}{c}, y = \dfrac{b}{c}$

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2 = 2(x^2+y^2+1) \Leftrightarrow 4xy = (x+y)^2 - 2(x+y) + 1$

Đặt $u = x+y, v = xy$, khi đó $u^2 - 2u + 1 = 4v \leq u^2 \Rightarrow u \geq \dfrac{1}{2}$

Bây giờ ta có

$$\begin{aligned}
P &= \frac{x^3+y^3+1}{(x+y+1)(xy+x+y)} = \frac{4(x^3+y^3)+4}{(x+y+1)(4xy+4x+4y)} \\
&= \frac{4u^3 - 3u.(u-1)^2 + 4}{(u+1)^3} = \frac{u^3+6u^2-3u+4}{(u+1)^2} \\
&= 1 + 3\frac{(u-1)^2}{(u+1)^3}
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(u) = \dfrac{(u-1)^2}{(u+1)^3}$ với $u \geq \dfrac{1}{2}$.

$$f'(u) = \frac{2(u-1)(u+1)^3 - 3(u^2-1)^2}{(u+1)^6} = \frac{2(u-1)(u+1) - 3(u-1)^2}{(u+1)^4}$$

$f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \vee u = 5$

Lập bảng biến thiên ta thu được trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $\min f(u) = f(1) = 0$ và $\max f(u) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(5) = \dfrac{2}{27}$

Vậy $\min P = 1$, đạt được chẳng hạn khi $a = 0, b = c \neq 0$

$\max P = \dfrac{11}{9}$, đạt được chẳng hạn khi $a = b = \dfrac{c}{4}$.

29 Lời giải đề 29

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x+y+1 = 0$. Từ điểm A thuộc đường thẳng Δ, kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C. Tìm tọa độ điểm A biết diện tích tam giác ABC bằng 8.

Lời giải

(C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$, $A\in\Delta\Rightarrow A(a;-a-1)$

Từ tính chất tiếp tuyến suy ra $IA\perp BC$ tại H là trung điểm của BC.

Giả sử $IA=m, IH=n$ $(m>n>0)$

Suy ra $HA=m-n, BH=\sqrt{IB^2-IH^2}=\sqrt{5-n^2}$

Suy ra $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.BC.AH=BH.AH=(m-n)\sqrt{5-n^2}$

Theo đề bài $S_{ABC}=8\Leftrightarrow(m-n)\sqrt{5-n^2}=8$

Mặt khác trong tam giác vuông IBA nên $BI^2=IH.IA\Rightarrow 5=mn\Rightarrow m=\dfrac{5}{n}$

Từ đó suy ra $\left(\dfrac{5}{n}-n\right)\sqrt{5-n^2}=8\Leftrightarrow n^6-15n^4+139n^2-125=0\Leftrightarrow n=1\Rightarrow m=5$

$IA=5\Leftrightarrow(a-2)^2+(-a-3)^2=25\Leftrightarrow a^2+a-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=-3\end{array}\right.$

Với $a=1\Rightarrow A(2;-3)$.

Với $a=-3\Rightarrow A(-3;2)$

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1}\\x^2(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 0$

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ.

Xét $x>0$, phương trình đầu tương đương $2y(1+\sqrt{4y^2+1})=\dfrac{1}{x}\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}\right)$ $(*)$

Xét hàm số $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+1})$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=1+\dfrac{2t^2+1}{\sqrt{t^2+1}}>0$ với mọi t.

Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2y=\dfrac{1}{x}$

Thay $2y=\dfrac{1}{x}$ vào phương trình hai ta được

$x^2+1+2(x^2+1)\sqrt{x}-6=0\Leftrightarrow x^2+2(x^2+1)\sqrt{x}-5=0$ $(**)$

Dễ thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình $(**)$

Xét hàm $g(x) = x^2 + 2(x^2+1)\sqrt{x} - 5$ với $x > 0$.

$g'(x) = 2x + 4x\sqrt{x} + \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} > 0$ với mọi $x > 0$

Vậy $g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, do đó 1 là nghiệm duy nhất của $(**)$

Với $x = 1$ thì $y = \dfrac{1}{2}$. Hệ có nghiệm duy nhất $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$

Bài 3

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $c = \min(a,b,c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2+c^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \sqrt{a+b+c}$$

Lời giải

Ta có $a^2 + c^2 \le a^2 + ac \le a^2 + ac + \dfrac{c^2}{4} = \left(a + \dfrac{c}{2}\right)^2$

Tương tự $b^2 + c^2 \le \left(b + \dfrac{c}{2}\right)^2$

$$P \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2} + \sqrt{a+b+c} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+\frac{c}{2}} + \frac{1}{b+\frac{c}{2}}\right)^2 + \sqrt{a+b+c} \ge \frac{1}{2}.\frac{16}{(a+b+c)^2} + \sqrt{a+b+c}$$

Đặt $t = \sqrt{a+b+c}$ $(t > 0)$. Khi đó $P \ge \dfrac{8}{t^4} + t$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{8}{t^4} + t$ với $t > 0$. Ta có $f'(t) = -\dfrac{32}{t^5} + 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Lập bảng biến thiên ta được $f(t) \ge f(2) = \dfrac{5}{2}$ với mọi $t > 0$. Do đó $P \ge \dfrac{5}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2, c = 0$

30 Lời giải đề 30

Bài 1

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC cân tại B, nội tiếp đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 10y - 25 = 0$. I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng BI cắt đường tròn (C) tại $M(5;0)$. Đường cao kẻ từ C cắt đường tròn (C) tại $N\left(\dfrac{-17}{5};\dfrac{-6}{5}\right)$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết điểm A có hoành độ dương.

Lời giải

Ta có $I(0;5)$. Do I là trung điểm $BM \Rightarrow B(-5;10)$

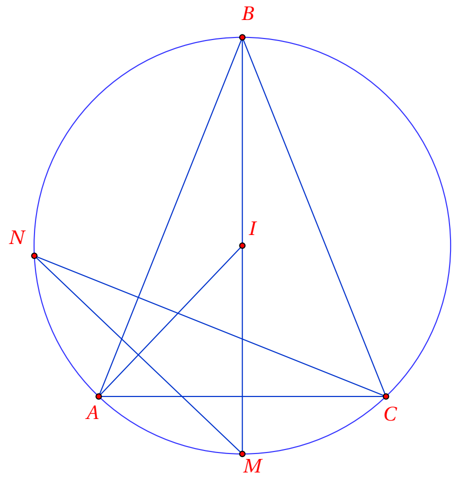
Vì tam giác ABC cân tại B nên BI là đường cao và cũng là phân giác góc ABC.

$\angle ABM = \angle ACN$ (cùng phụ $\angle BAC$) nên A là trung điểm cung MN. Do đó $AI \perp MN$. Suy ra phương trình $AI : 7x + y - 5 = 0$

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 7x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10y - 25 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A(1;-2)$ (do $x_A > 0$)

Phương trình $BI : x + y - 5 = 0$. Do $AC \perp BI$ nên phương trình $AC : x - y - 3 = 0$



Gọi H là giao điểm của AC và MN, khi đó $H(4;1)$. Suy ra tọa độ $C(7;4)$.

Bài 2

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = y^3 + 3y \\ x^3(3y - 7) = 1 - \sqrt{(1 + x^2)^3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Phương trình đầu tương đương $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với mọi t nên $f(t)$ đồng biến.

Từ đó $(*) \Leftrightarrow x + 1 = y$. Thay $y = x + 1$ vào phương trình sau ta được

$$x^3(3x-4) = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3} \Leftrightarrow x^3(3x-4) = \frac{-x^2\left(1 + \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2\right)}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(3x^2 - 4x + \frac{2 + x^2 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(3x^2 - 4x + 1 + \frac{1+x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 + \dfrac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0 \end{array}\right.$$

Xét $3x^2 - 4x + 1 + \dfrac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1+x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{3 + 3x^2 - \sqrt{1+x^2} - 1}{1 + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{x^2 + 1 - \sqrt{x^2+1} + 1 + 1 + 2x^2}{1 + \sqrt{1+x^2}} = 0$$

Phương trình này vô nghiệm do vế trái lớn hơn 0.

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Với $x = 0$ thì $y = 1$. Hệ phương trình có nghiệm $(0;1)$.

Bài 3

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)\leq\frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}$$

Lời giải

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz $P=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{9}{a+b+c+3}$

Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2-a-b-c\leq\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{3}-(a+b+c)\leq\frac{4}{3}\Rightarrow 0<a+b+c\leq 4$

Đặt $t=a+b+c$, thế thì $0<t\leq 4$. Khi đó $P\geq\frac{9}{t+3}$

Ta chứng minh $\frac{9}{t+3}\geq\frac{9}{7}$. Thật vậy $\frac{9}{t+3}\geq\frac{9}{7}\Leftrightarrow t\leq 4$

BĐT cuối luôn đúng do $t\leq 4$. Vậy $P\geq\frac{9}{7}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{4}{3}$.

Vậy $\min P=\frac{9}{7}$.